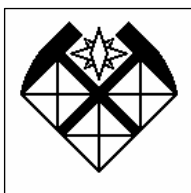


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Серго Орджоникидзе
(МГРИ-РГГРУ)

А. Д. Каринский

Теория поля.

*Дополнительные главы для специализации
"сейсморазведка"*

Учебное пособие

Москва, 2018 г.

УДК 550.83.015

Каринский А.Д.

"Теория поля, дополнительные главы" для специализации "сейсморазведка". Учебное пособие. Российский государственный геологоразведочный университет (МГРИ–РГГРУ). 2018,. 104 с.

Учебное пособие составлено на основе курса лекций и практических занятий, читаемых (и проводимых) автором этой работы в течение нескольких последних лет с теми студентами Геофизического факультета МГРИ-РГГРУ, которые при поступлении в ВУЗ выбрали специализацию «сейсморазведка».

Некоторые приведенные в этой работе материалы заимствованы из составленных нами ранее учебного пособия [Каринский, 2014,*a*], которое есть в интернет (в "свободном доступе").

Учебники и учебные пособия, на которые имеются ссылки ([...]), приведены в конце этого пособия. В основном, это- ссылки на те вопросы, понятия, доказательства которые приведены в (отражающем мировоззрение научной школы МГРИ) учебнике [Альпин и др., 1985] (Л. М. Альпин, Д. С. Даев, А. Д. Каринский "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике").

Ил. 55, список лит. 9 назв.

Оглавление

Обозначения	- 5 -
1. ВВЕДЕНИЕ	- 6 -
1.1. Скалярные и векторные величины	- 6 -
1.2. Скалярная и векторная компоненты вектора \mathbf{M}	- 8 -
1.3. Поле	- 8 -
1.4. Определение скалярных и векторных полей в ортогональных системах координат	- 10 -
1.5. Коэффициенты Ламэ	- 12 -
1.6. Преобразование компонент векторного поля при повороте осей декартовых координат	- 13 -
1.7. Первая пространственная производная скалярного поля T - градиент T	- 14 -
1.8. Поток вектора \mathbf{M} и пространственная производная $\operatorname{div} \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}	- 16 -
1.8.1. Потоки вектора \mathbf{M} через ориентированную элементарную площадку dS и поверхность S	- 16 -
1.8.2. Производная $\operatorname{div} \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}	- 18 -
1.9. Напряжение поля \mathbf{M} и циркуляция; пространственная производная $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}	- 19 -
1.9.1. Напряжения $d\mathcal{E}$, \mathcal{E} , и циркуляция \mathcal{C} поля \mathbf{M}	- 19 -
1.9.2. Производная ротор поля \mathbf{M}	- 20 -
1.9.3. Потенциальные и соленоидальные векторные поля	- 22 -
1.9.4. Вторые производные скалярного поля T	- 22 -
1.9.5. Вторые производные векторного поля \mathbf{M}	- 23 -
1.10. Тензорные величины и поля, их преобразование при повороте осей декартовых координат	- 25 -
1.10.1. Тензорные величины и поля	- 25 -
1.10.2. Преобразование истинного тензора (тензорного поля) врогого ранга при повороте осей декартовых координат	- 26 -

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	- 27 -
2.1. Упругие напряжения, виды упругих напряжений.....	- 28 -
2.2. Тензор упругих напряжений.....	- 30 -
2.3. Поле вектора смещения.....	- 33 -
2.4. Деформации.....	- 34 -
2.5. Тензоры деформаций.....	- 36 -
2.6. Вектор вращения. Дилатация	- 38 -
2.6. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона	- 41 -
2.7. Выражение упругих напряжений через деформации. Упругие постоянные Ламэ	- 45 -
3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ	- 46 -
3.1. Уравнение передачи упругих колебаний (уравнение Ламэ)	- 46 -
3.2. Волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн..	- 49 -
3.3. Уравнение струны его решения	- 52 -
3.4. Плоская продольная упругая волна	- 55 -
3.5. Плоская поперечная упругая волна	- 57 -
3.6. Гармонически меняющееся скалярное поле	- 59 -
3.7. Гармонически меняющееся векторное поле	- 62 -
3.8. Ряд Фурье.....	- 64 -
3.9. Интеграл (преобразование) Фурье в комплексной форме	- 66 -
3.10. Спектральные характеристики прямоугольного импульса и δ - функции Дирака	- 67 -
3.11. Уравнения Гельмгольца для гармонически меняющихся полей смещений U_p, U_s	- 68 -
3.12. Некоторые решения уравнения Гельмгольца, соответствующие гармоническим плоским P и S волнам в однородной среде	- 70 -
3.13. Граничные условия для полей смещений U_p, U_s	- 70 -

3.14. Нормальное падение плоской гармонической продольной упругой волны на плоскую границу	- 72 -
3.15. Нормальное падение плоской гармонической линейно поляризованной поперечной упругой волны на плоскую границу	- 74 -
3.16. Наклонное падение плоской гармонической продольной упругой волны на плоскую границу	- 76 -
3.17. Плоская неоднородная волна	- 81 -
3.18. Уравнения и граничные условия для потенциалов поля смещений .	- 83 -
3.19. Пример расчёта сферически-симметричного статического поля смещений	- 84 -
3.20. Сферический источник ("очаг") продольных упругих волн	- 87 -
3.21. О точечном источнике продольных упругих волн.....	- 94 -
3.22. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. "Сосредоточенный" источник	- 94 -
3.23. О Формуле Кирхгофа и принципе Гюйгенса-Френеля.....	- 96 -
3.24. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн	- 98 -
Литература.....	- 104 -

Обозначения

$\mathbf{1}_x, \dots, \mathbf{1}_z, \mathbf{1}_R, \dots$ - единичные векторы (орты) с абсолютной величиной, равной единице;

a - точка наблюдения;

\mathbf{a} - ускорение;

dS - бесконечно-малая площадка;

dV - бесконечно-малый объём;

E - модуль Юнга;

\mathcal{E} - напряжение векторного поля;

\mathbf{F} - сила;

f - частота колебаний;

h - коэффициент Ламэ;

$i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица;

k - волновое число;

$\mathbf{L}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{qa}$ - радиус-векторы с модулями L, L_{12}, L_{qa} ;

L - расстояние;

\mathbf{M} - в разделе 1- векторное поле;

n - нормаль к поверхности;

q - точка в источнике (возбудителе) поля;

R - сферическая координата;

S - поверхность, площадь;

t - время;

T - период колебаний, в разделе 1- скалярное поле;

\mathbf{U} - вектор смещения с декартовыми компонентами U, V, W ;

V - область пространства, объём;

v - скорость;

v_P - скорость продольных упругих волн;

v_S - скорость поперечных упругих волн;

x, y, z - декартовы координаты;

X, Y, Z - оси в декартовых координатах;

γ (гамма)- деформация сдвига;

ε (эпсилон)- деформация сжатия- растяжения;

η (эта)- скорость смещения;

θ (тета)- сферическая координата, дилатация;

λ (лямбда)- одна из упругих постоянных Ламэ;

Λ (лямбда прописная)- длина волны;

μ (мю)- одна из упругих постоянных Ламэ- модуль сдвига;

ν (ню)- коэффициент Пуассона;

ξ (кси)- координата;

- π (пи) $\approx 3.141592653589793238462643\dots$;
- ρ (ро) - плотность масс;
- σ (сигма) - нормальное упругое напряжение;
- τ (тау) - касательное упругое напряжение;
- φ (фи) - сферическая (азимутальная) координата, начальная фаза;
- Φ (фи прописная) - скалярный потенциал поля смещений U ;
- ψ (пси) - поток вектора;
- Ψ (пси прописная) - векторный потенциал поля смещений U ;
- ω (омега) - круговая частота;
- $\boldsymbol{\omega}$ - вектор вращения;
- ζ - циркуляция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вспомним сначала некоторые понятия, которыми мы пользовались в четвёртом семестре при изучении общего для всех студентов-геофизиков групп РФ во МГРИ курса "Теория поля". Этот курс, был "сокращён с 2-х семестров до 1-го семестра" для групп РФ-11, РФ-12 и т. д. Но для специализации "Сейсморазведка" студентов групп РФ-XX-3 геофизического факультета МГРИ-РГГРУ "появился" курс "Теория поля, дополнительные главы", к изучению которого мы и перейдём.

1.1. Скалярные и векторные величины

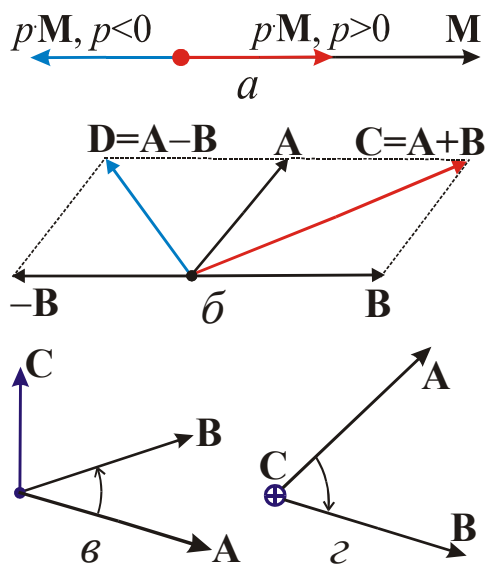


Рис. 1.1.

Произведение $p \cdot \mathbf{M}$ скаляра p и вектора \mathbf{M} (a); Сложение и вычитание векторов (b); векторное произведение \mathbf{C} векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} (φ , z).

Скалярную величину T характеризует число, а также размерность (если T - не безразмерная величина). Примеры скалярных величин - масса m (кг), заряд e (Кул). Действия сложения и вычитания применимы к скалярным величинам только в том случае, если они имеют одинаковую размерность. При перемножении или делении таких величин тем же действиям подвергаются их размерности.

Векторную величину \mathbf{M} характеризуют абсолютная величина $|\mathbf{M}|=M$ и направление вектора \mathbf{M} . При "геометрическом изображении" такой величины её удобно представить направленным отрезком. Пример векторной величины - сила \mathbf{F} (Н).

При умножении вектора \mathbf{M} на скалярную величину p (или при делении \mathbf{M} на скалярную величину s) получаем вектор $p \cdot \mathbf{M}$ или \mathbf{M}/s , где

абсолютная величина вектора $p \cdot \mathbf{M}$ равна $|p| \cdot M$ (или $M/|s|$), а направление вектора $p \cdot \mathbf{M}$ совпадает с направлением \mathbf{M} при $p > 0$, либо направление вектора $p \cdot \mathbf{M}$ (или \mathbf{M}/s) противоположно направлению \mathbf{M} при $p < 0$ или $s < 0$ (рис. 1.1,а). При умножении вектора \mathbf{M} на скаляр p ($p \mathbf{M}$), или делении \mathbf{M} на скаляр s (\mathbf{M}/s) тем же действиям подвергаются размерности вектора \mathbf{M} и скаляров p или s . Например, если \mathbf{F} - сила, действующая на массу m , а \mathbf{a} - ускорение, то по 2-му закону Ньютона, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ где размерности: $[F] = \text{Н}$, $[m] = \text{кг}$, $[a] = \text{Н}/\text{кг} = \text{м}/\text{с}^2$.

Действие сложения ($\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$) применимо к векторным величинам только в том случае, если они имеют одинаковую размерность и геометрическая иллюстрация таких действий - "правило параллелограмма". При вычитании векторов ($\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{D}$) можно учесть, что векторы \mathbf{B} и $-\mathbf{B}$ имеют одинаковую абсолютную величину и противоположное направление (рис. 1.1,б).

Есть два вида умножения (произведения) двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} .

1). Скалярное произведение векторов:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \mathbf{B}) = p = A \cdot B \cdot \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

В соответствии с (1.1) скалярное произведение векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} это - скалярная величина (скаляр p), равная произведению модулей (абсолютных величин) этих векторов на косинус угла между направлениями этих векторов. Знак скалярного произведения векторов - тот же, что знак косинуса угла между направлениями \mathbf{A} , \mathbf{B} . То есть скалярное произведение p векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} в зависимости от угла между направлениями векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} может быть положительным, отрицательным, или равным нулю. Понятно, что это произведение $p = 0$, если угол между направлениями векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} равен $\pi/2$, рад. (90°).

2). Векторное произведение векторов:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{A} \mathbf{B}] = \mathbf{C} \quad (1.2)$$

это вектор \mathbf{C} . Абсолютная величина вектора \mathbf{C} : $C = A \cdot B \cdot \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, а направление \mathbf{C} определяет следующее: $\mathbf{C} \perp \mathbf{A}$, $\mathbf{C} \perp \mathbf{B}$ и векторы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} образуют правую тройку. Последнее означает, что если вектор \mathbf{A} "повернуть" на наименьший угол (между направлениями \mathbf{A} , \mathbf{B}) в направлении вектора \mathbf{B} , то направление вектора \mathbf{C} определяют "правило правого винта" (рис. 1.1,в, г). На рис. 1.1,г векторы \mathbf{A} , \mathbf{B} лежат в плоскости рисунка, а вектор \mathbf{C} ортогонален этой плоскости и направлен "от нас". На рис. 1.1,в сделана попытка проиллюстрировать равенство (1.2) "объёмным" рисунком.

В соответствии с (1.2) векторное произведение \mathbf{C} векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} это - вектор, который равен нулю, если векторы \mathbf{A} , \mathbf{B} - коллинеарны (взаимно-параллельны ($\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$), либо антипараллельны ($\mathbf{A} \uparrow \downarrow \mathbf{B}$)). Такое понятие, как деление (чего либо) на вектор - не определено, либо (по крайней мере) не известно автору этой работы.

1.2. Скалярная и векторная компоненты вектора \mathbf{M}

Вектор \mathbf{M} характеризуют его абсолютная величина $|\mathbf{M}|=M$ и направление, либо три скалярные величины - скалярные компоненты M_1, M_2, M_3 вектора \mathbf{M} в системе координат (см. ниже). Вспомним такие понятия, как векторная (\mathbf{M}_l) и скалярная (M_l) компоненты вектора \mathbf{M} по направлению (по линии) l . На рис. 1.2,а. показаны: вектор \mathbf{M} в точке a , проходящая через эту точку линия l , векторная компонента \mathbf{M}_l по направлению l и (пунктирной линией) - касательная к линии l в точке a прямая.

Безразмерный единичный вектор $\mathbf{1}_l$ в точке a линии l направлен по касательной к линии l . Абсолютная величина $|\mathbf{1}_l|=1$. Компоненты M_l и \mathbf{M}_l определяют выражения:

$$M_l = M \cdot \cos(\mathbf{M}, \mathbf{1}_l) = (\mathbf{M} \mathbf{1}_l), \quad \mathbf{M}_l = \mathbf{1}_l \cdot M_l, \quad (1.3)$$

где, в соответствии с (1.1), $(\mathbf{M} \mathbf{1}_l)$ - скалярное произведение векторов \mathbf{M} и $\mathbf{1}_l$. Из (1.3) следует, что при остром (или равном нулю) угле между

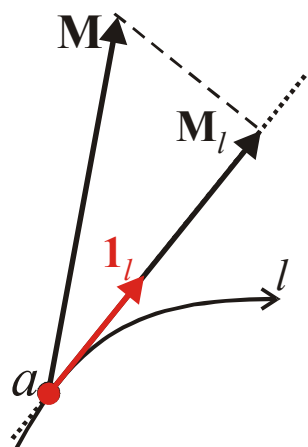


Рис. 1.2.
Векторная компонента \mathbf{M}_l вектора \mathbf{M} по направлению (линии) l и единичный вектор $\mathbf{1}_l$, касательный к l

направлениями \mathbf{M} и $\mathbf{1}_l$ компонента $M_l > 0$, а при тупом (или равном π) угле между направлениями \mathbf{M} и $\mathbf{1}_l$ компонента $M_l < 0$. Если направления векторов \mathbf{M} и $\mathbf{1}_l$ - одинаковы, то $M_l = M$, а если эти направления - взаимно ортогональны, то компонента $M_l = 0$. При $M_l > 0$ направление векторной компоненты \mathbf{M}_l совпадает с направлением $\mathbf{1}_l$, а при $M_l < 0$ имеем: $\mathbf{M}_l \uparrow \downarrow \mathbf{1}_l$, то есть векторная компонента \mathbf{M}_l имеет направление, противоположное направлению $\mathbf{1}_l$.

1.3. Поле

Понятию "поле" будем придавать как *физический*, так и *математический* смысл. В первом случае можем, например, говорить о том, что электрический заряд создаёт электрическое поле с напряжённостью \mathbf{E} . Математически определим понятие "поле" следующим образом.

Величина F образует в области пространства V поле, если каждой точке a области V соответствует некоторое значение F . Иными словами, величина F есть функция положения точки a в области V : $F = F(a)$. Замкнутую поверхность, ограничивающую область V , будем обозначать $S[V]$.

Точку a , в которой мы рассматриваем, определяем (или на практике - измеряем) поле, условно назовём "точкой наблюдения". Положение точки a в области пространства V будем определять двумя способами.

1). При помощи радиуса-вектора \mathbf{L}_{Oa} с началом в некоторой точке O и концом в точке a . Модуль этого вектора $|\mathbf{L}_{Oa}| = L_{Oa}$, где L_{Oa} - расстояние между точками O и a .

2). При помощи трёх скалярных величин - координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 в той или иной системе координат.

В общем случае поле F зависит не только от положения точки a , но и от времени t : $F = F(a, t)$. Тогда поле F называют *переменным*. Если поле F не зависит от времени t ($F = F(a), \partial F / \partial t \equiv 0$), то это - *постоянное* поле F .

Если (постоянное или переменное) поле F не зависит от положения точки a в области пространства V , то это - *однородное* поле в этой области пространства V . Тогда в области V имеем: $\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0$, где

$\xi_{1,2,3}$ - координаты.

Различают *скалярные, векторные и тензорные* поля.

1). **Скалярное поле** $T(a)$ в каждой точке a области пространства V характеризует скалярная величина T , то есть - число (а также размерность в системе физических единиц). Примеры таких полей: температура t° (в градусах Цельсия, или градусах Кельвина), объёмная плотность масс ρ (в $\text{кг}/\text{м}^3$) и др.

Геометрически распределение скалярного поля T в пространстве

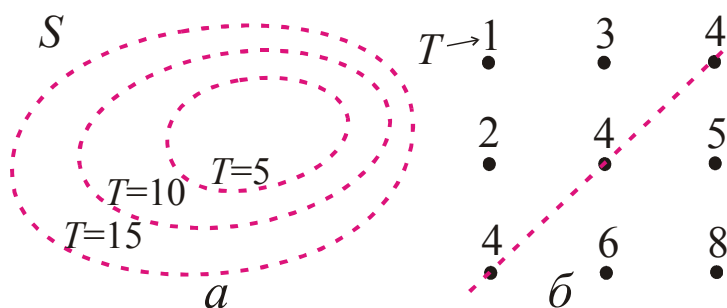


Рис. 1.3.

Представление скалярного поля T на поверхности S при помощи изолиний $T = \text{const}$ (а) или чисел в "узлах квадратной сетки" (б)

можно представить при помощи *уровневых поверхностей* $T = \text{const}$. Их сечение другой поверхностью S (плоскостью чертежа, или, например, поверхностью Земли) даёт *изолинии* $T = \text{const}$ скалярного поля T на поверхности S (рис. 1.3,а). В некоторых

случаях оказывается удобнее наглядно показать распределение поля T на поверхности S при помощи чисел во множестве точек, например, расположенных на S "узлах квадратной сетки" (рис. 1.3,б).

2). **Векторное поле** $\mathbf{M}(a)$ в каждой точке a характеризует вектор \mathbf{M} . Примеры представляющих интерес в сейсморазведке векторных полей - это, например, вектор смещения \mathbf{U} и его составляющие U_P, U_S , а также - вектор вращения $\boldsymbol{\omega}$ (см. ниже). Понятно, что, как и векторную величину \mathbf{M} , векторное поле $\mathbf{M}(a)$ в каждой точке a пространства (в области V) характеризуют абсолютная величина $|\mathbf{M}(a)| = M(a)$ и направление вектора $\mathbf{M}(a)$.

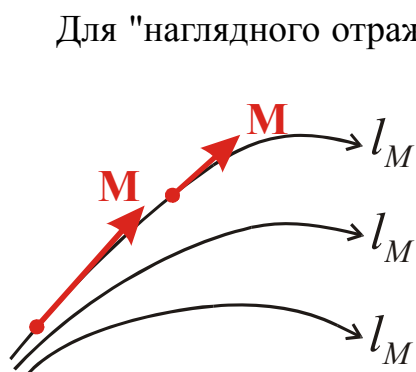


Рис. 1.4.
Векторные линии l_M поля \mathbf{M}

Для "наглядного отражения" некоторых особенностей того или иного векторного поля \mathbf{M} бывает удобно воспользоваться таким понятием, как векторные линии l_M поля \mathbf{M} (рис. 1.4). Векторы \mathbf{M} направлены по касательным к векторным линиям l_M , а "густота" этих линий (в некоторой степени) может отражать абсолютные величины M векторов \mathbf{M} . Если \mathbf{M} - силовая характеристика поля, то линии l_M называют силовыми линиями.

Есть ещё тензорные поля, но это понятие и определение таких полей рассмотрим ниже (в разделе 1.10).

1.4. Определение скалярных и векторных полей в ортогональных системах координат

Для определения положения точки наблюдения a и полей $T(a)$, $\mathbf{M}(a)$ в этой точке в (реальном для нас) трёхмерном пространстве мы пользуемся системами координат с тремя координатами: ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Пусть положение в пространстве точки a определяют координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 и начинает увеличиваться координата ξ_1 , а координаты ξ_2, ξ_3 не меняются. Тогда точка a будет перемещаться по линии l_1 , которую называют координатной линией (рис. 1.5). Аналогичным образом при увеличении координат ξ_2 , либо ξ_3 , и при фиксированных значениях остальных координат точка a будет перемещаться по координатной линии l_2 , либо по координатной линии l_3 соответственно. Касательные к координатным линиям l_1, l_2, l_3 в точке a безразмерные единичные векторы $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ показаны на рис. 1.5.

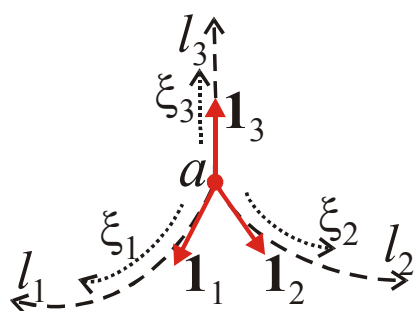


Рис. 1.5.
Система координат ξ_1, ξ_2, ξ_3

В ортогональных системах координат единичные векторы $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ в каждой точке a - взаимно ортогональны, а векторы $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ называют ортами. Если векторы $\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ образуют правую тройку, то систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 называют "правой". В правой системе координат при вращении вектора $\mathbf{1}_1$ на наименьший угол (90°) в направлении вектора $\mathbf{1}_2$ направление вектора $\mathbf{1}_3$ определяет правило правого винта (рис. 1.1, в, г, рис. 1.5).

Для определения скалярного поля T в системе координат надо выразить поле как функцию координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 : $T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В частных случаях поле T зависит не от трёх координат, а от двух или от одной координаты.

В соответствии с выражениями (1.3), для того, чтобы определить векторное поле \mathbf{M} в ортогональных координатах надо представить поле \mathbf{M} в следующем виде:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}_1 \cdot M_1 + \mathbf{1}_2 \cdot M_2 + \mathbf{1}_3 \cdot M_3, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{1}_i \cdot M_i$, ($i=1, 2, 3$), M_i - скалярные компоненты, а \mathbf{M}_i - векторные компоненты вектора \mathbf{M} . Скалярные компоненты $M_{1,2,3}$ надо определить как функции координат $\xi_{1,2,3}$: $M_1 = M_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M_2 = M_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $M_3 = M_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Некоторые из компонент поля \mathbf{M} могут быть равны нулю, а ненулевые компоненты \mathbf{M} могут зависеть не от трёх координат, а от двух или от одной координаты. В соответствии с (1.3), (1.4), если скалярная компонента M_i положительна, то векторная компонента \mathbf{M}_i направлена как вектор $\mathbf{1}_i$. Если компонента M_i отрицательна, то направления векторов \mathbf{M}_i и $\mathbf{1}_i$ противоположны (см. рис.1,а).

Будем пользоваться двумя правыми ортогональными системами координат: декартовой ($\xi_1=x, \xi_2=y, \xi_3=z$) и сферической ($\xi_1=R, \xi_2=\theta, \xi_3=\varphi$).

Декартову систему координат образуют три взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z пересекающиеся в точке O – начале координат (рис. 1.6,а). Координатам x, y, z точки a соответствуют

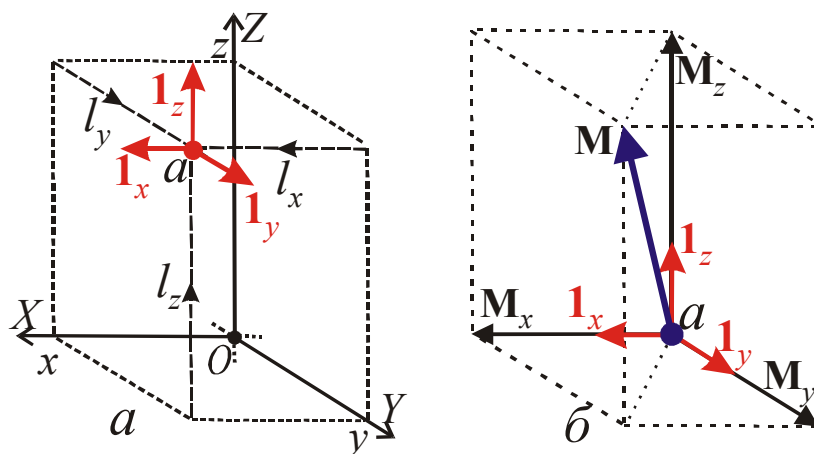


Рис. 1.6.

Декартова система координат x, y, z (а); вектор \mathbf{M} как сумма векторных компонент $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z$, в декартовых координатах (б)

проекции этой точки на соответствующие координатные оси. Координатные линии l_x, l_y, l_z - прямые, параллельные соответствующим осям. Орты $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ всюду направлены вдоль линий l_x, l_y, l_z и, соответственно, параллельны осям X, Y, Z . Пределы

изменения и размерности (единицы измерения) декартовых координат: $-\infty < x(m) < \infty, -\infty < y(m) < \infty, -\infty < z(m) < \infty$. Рис. 1.6,б иллюстрирует то, что, в соответствии с (1.3), (1.4), вектор \mathbf{M} равен сумме 3-х взаимно - ортогональных векторных компонент: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}_y + \mathbf{M}_z$.

"Задание". Определить скалярные и векторные произведения единичных векторов $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ в правых ортогональных декартовых координатах x, y, z .

- а) $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x)$, б) $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y)$, в) $(\mathbf{1}_z \mathbf{1}_x)$, ...;
- г) $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x]$, д) $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y]$, е) $[\mathbf{1}_y \mathbf{1}_x]$,

"Решение" (ответы).

В соответствии с (1.1), (1.2) в показанной на рис. 6 правой ортогональной декартовой системе координат x, y, z для скалярных и векторных произведений единичных векторов $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ получаем следующее.

Скалярные произведения: а) $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x)=1$, б) $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y)=0$, в) $(\mathbf{1}_z \mathbf{1}_x)=0\dots$;

векторные произведения: г) $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x]=0$, д) $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y]=\mathbf{1}_z$, е) $[\mathbf{1}_y \mathbf{1}_x]=-\mathbf{1}_z\dots$

Сферическая система координат R, θ, φ (рис. 1.7). Чтобы ввести эту систему координат, надо определить положение в пространстве полярной оси (показанной на рис. 1.7 штрих-пунктирной линией), выбрать начало координат O на этой оси и начало отсчета координаты φ – полу плоскости $\varphi=0$, ограниченной полярной осью. Координата R точки a равна расстоянию L_{Oa} от начала координат O до точки a ; координата θ – (полярный) угол между радиусом-вектором \mathbf{L}_{Oa} и направлением полярной оси; (азимутальная) координата φ – угол между ограниченной полярной осью

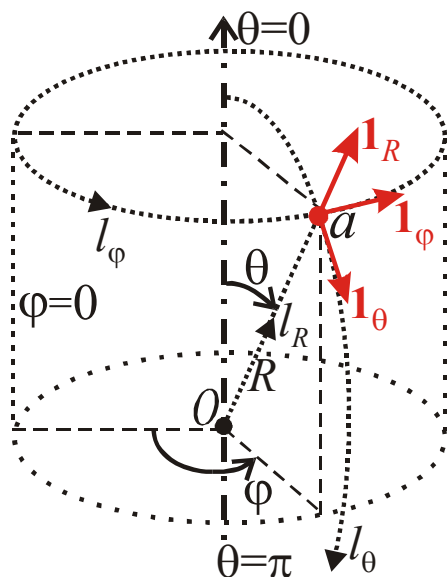


Рис. 1.7.

Сферическая система координат

осью полу плоскостью, проходящей через точку a , и полу плоскостью $\varphi=0$. В правой системе сферических координат направления отсчета координаты φ и полярной оси образуют правовинтовую систему.

Пределы изменения и размерности сферических координат: $0 \leq R(\text{м}) < \infty$, $0 \leq \theta(\text{рад}) \leq \pi$, $\infty < \varphi(\text{рад}) < \infty$. Координатные линии: l_R - лучи, исходящие из начала координат O ; l_θ - полуокружности с центром в точке O , опирающиеся на полярную ось; l_φ - окружности, осью которых является полярная ось. В сферических координатах (в отличие от декартовых) направления ортов $(\mathbf{1}_R \mathbf{1}_\theta, \mathbf{1}_\varphi)$ зависят от 2-х координат - полярного угла θ и азимутальной координаты φ .

1.5. Коэффициенты Ламэ

Коэффициенты Ламе h_i ($i=1, 2, 3$) определяют связь между приращением $d\xi_i$ координаты ξ_i и перемещением dl_i вдоль координатной линии l_i , которое совершает при этом точка (рис. 1.8,a):

$$h_i = dl_i / d\xi_i ; \quad dl_i = h_i \cdot d\xi_i. \quad (1.5)$$

Определим коэффициенты Ламэ для декартовых и сферических координат. В этих системах координат существенно различается два типа координатных линий.

1. Линии l_x, l_y, l_z, l_R – прямые или лучи. Координаты x, y, z, R определяют в единицах длины (метрах). Очевидно, что коэффициенты Ламэ для этих координат равны единице, так как путь, проходимый точкой при приращении (увеличении) какой либо из этих координат, равен величине этого приращения.

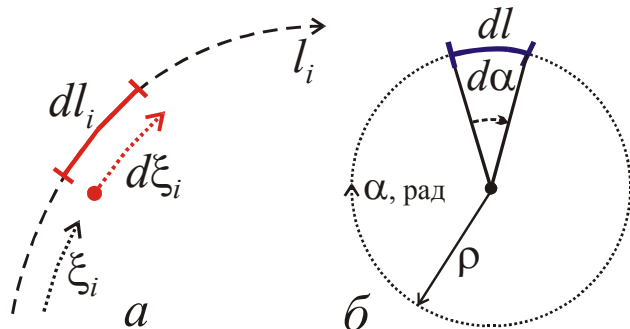


Рис. 1.8.

К определению коэффициентов Ламэ

θ и φ определяют в безразмерных угловых единицах (радианах). Рассмотрим, как связан путь dl проходимый точкой по дуге окружности радиуса ρ , с приращением $d\alpha$ угловой координаты α (рис. 1.8,б). По определению центральный угол (в радианах) равен отношению длины (ограниченной двумя радиусами) дуги окружности к радиусу этой окружности. Следовательно, $d\alpha = dl/\rho$, то есть $\rho = dl/d\alpha$. При сравнении этого выражения с определением (1.5) коэффициента Ламэ h_i видно, что в случае, если измеряемая в радианах координата - угловая, а координатная линия - окружность (или полуокружность), коэффициент Ламэ равен радиусу этой окружности. Тогда в сферических координатах для коэффициентов Ламэ получаем: $h_\theta = R, h_\varphi = R \cdot \sin\theta$ (см. рис. 1.7).

1.6. Преобразование компонент векторного поля при повороте осей декартовых координат

В дальнейшем надо будет воспользоваться правилами преобразования декартовых компонент векторного поля \mathbf{M} при повороте осей декартовых координат X, Y, Z .

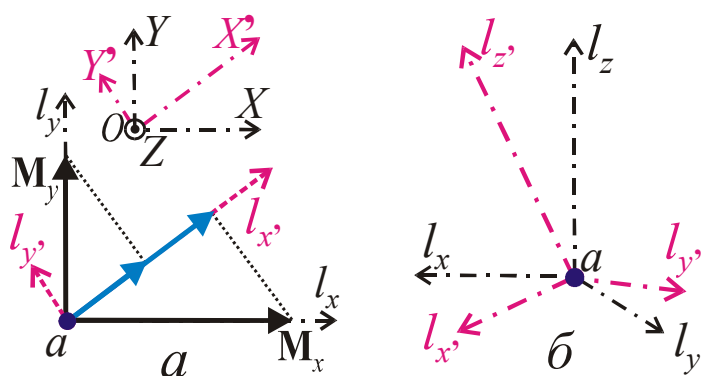


Рис. 1.9.

К преобразованию составляющих векторного поля \mathbf{M} при повороте осей декартовых координат

Рассмотрим сначала частный случай, когда оси X, Y декартовых координат лежат в плоскости чертежа, а поворот этих осей происходит вокруг ортогональной плоскости чертежа оси Z (рис. 1.9,а). На этом рисунке показаны оси X, Y , параллельные этим осям координатные линии l_x, l_y и, векторные компоненты $\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y$ поля \mathbf{M} при положительных скалярных компонентах M_x, M_y (см. раздел 1.2 и

\mathbf{M} при положительных скалярных компонентах M_x, M_y (см. раздел 1.2 и

рис. 1.6) в системе координат x, y, z . При повороте осей X, Y вокруг оси Z получаем "новые" оси X', Y' и параллельные этим осям координатные линии $l_{x'}, l_{y'}$, лежащие в плоскости чертежа (рисунка 1.9,а). Векторные компоненты вектора \mathbf{M} по $l_{x'}$, как проекции компонент M_x, M_y на параллельное оси X' направлению $l_{x'}$, показаны на рис. 1.9,а. Примем во внимание выражения (1.3). Понятно, что в случае, показанном на рис. 1.9,а, скалярная компонента вектора \mathbf{M} по оси X' : $M_{x'} = M_x \cdot \cos(X', X) + M_y \cdot \cos(X', Y)$. Здесь $(X', X), (X', Y)$ - углы между направлениями соответствующих осей.

Перейдём к более общему случаю. Пусть скалярные компоненты поля \mathbf{M} в декартовых координатах x, y, z с осями X, Y, Z равны, соответственно, M_x, M_y, M_z . При повороте осей декартовых координат их "новые" направления - X', Y', Z' , а параллельные этим осям координатные линии - это (направленные) прямые $l_{x'}, l_{y'}, l_{z'}$. Тогда, при фиксированном положении в пространстве точки наблюдения a при повороте осей координат скалярные компоненты $M_{x'}, M_{y'}, M_{z'}$, поля $\mathbf{M}(a)$ в "новой" системе координат x', y', z' с осями X', Y', Z' определяют выражения:

$$\left. \begin{aligned} M_{x'} &= M_x \cdot \cos(X', X) + M_y \cdot \cos(X', Y) + M_z \cdot \cos(X', Z), \\ M_{y'} &= M_x \cdot \cos(Y', X) + M_y \cdot \cos(Y', Y) + M_z \cdot \cos(Y', Z), \\ M_{z'} &= M_x \cdot \cos(Z', X) + M_y \cdot \cos(Z', Y) + M_z \cdot \cos(Z', Z), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где $(X', X), (X', Y), (X', Z), (Y', X), \dots$ - углы между направлениями соответствующих осей (и координатных линий) двух систем (x, y, z) и (x', y', z') ортогональных декартовых координат.

1.7. Первая пространственная производная скалярного поля T - градиент T .

Пространственные производные скалярного поля $T(a)$ и векторного поля $\mathbf{M}(a)$ характеризуют некоторые особенности изменения полей в окрестности точки a .

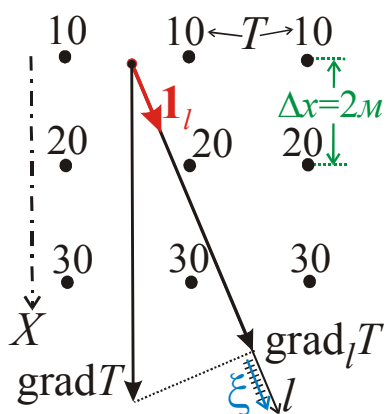
Градиент (grad) - первая пространственная производная скалярного поля T . $\text{grad } T(a)$ - векторное поле. Производная $\text{grad } T(a)$ - вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания поля T в окрестности точки a и абсолютную величину, равную производной поля T по направлению $\text{grad } T$.

На рис. 1.10 (для случая, когда вектор $\text{grad } T$ лежит в плоскости чертежа) показана векторная компонента $\text{grad}_l T$ по направлению l . Эта компонента $\text{grad}_l T = \mathbf{1}_l \text{grad}_l T$, где $\mathbf{1}_l$ единичный вектор по направлению l , а $\text{grad}_l T$ - скалярная компонента вектора $\text{grad } T$ по направлению l . Согласно выражению (1.3), скалярная компонента

$grad_l T = (\mathbf{1}_l, grad T)$. Отсюда следует (см. [1], с. 14, 15), что $grad_l T = \partial T / \partial l$.

Если, например, вектор $grad T$ направлен по оси X (рис. 1.10), то абсолютная величина $|grad T| = dT/dx$. В этом случае, принимая во внимание, что $\frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x}$, а в приведенном на рис. 1.10 примере поле

T линейно возрастает по направлению оси X , $|grad T| = \Delta T / \Delta x$. Поэтому при показанных на рис. 1.10 расстояниях Δx ($\Delta x = 2$ м) между узлами



"квадратной сетки" и численных значениях T ($\Delta T = 10$??) имеем:

$|grad T| \cong \Delta T / \Delta x = 10(??) / 2(м) = 5(??/м)$, где (??) - размерность скалярного поля T .

Понятно, что вектор $-grad T$ направлен в сторону наиболее резкого убывания ("падения") поля T . Если в области пространства V поле $T(a)$ - однородно (одинаково во всех точках a), то в этой области $grad T = 0$.

Рис. 1.10.
Вектор $grad T$ и его векторная компонента $grad_l T$ по направлению l

Если l - координатная линия, по которой перемещается точка при увеличении координаты ξ , то $\partial l = h_\xi \partial \xi$, где h_ξ - коэффициент Ламэ для координаты ξ (см.

(1.5)). В этом случае скалярную ($grad_l T$) и векторную ($grad_l T = \mathbf{1}_\xi \cdot grad_l T$) компоненты вектора $grad T$ определяют выражения:

$$grad_l T = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad grad_l T = \frac{\mathbf{1}_\xi}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}. \quad (1.7)$$

Складывая три взаимно-ортогональные векторные компоненты вектора $grad T$, получаем выражения для этого вектора в произвольных ортогональных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3 , и, в частности, в декартовых координатах x, y, z , в которых $h_x = h_y = h_z = 1$:

$$grad T = \frac{\mathbf{1}_1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{\mathbf{1}_2}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{1}_3}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3}, \quad grad T = \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.8)$$

Для записи пространственных производных часто бывает удобно воспользоваться оператором Гамильтона (оператором набла) ∇ . В декартовых координатах

$$\nabla = \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.9)$$

При сравнении выражений (1.9), (1.8) видим, что

$$grad T = \nabla T. \quad (1.10)$$

"Задание". Получить выражения для пространственной производной $grad T$ полей T , заданных в системах ортогональных координат x, y, z или R, θ, φ .

а) $T = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; б) $T = C \cdot R^2$, где $C = \text{const}$.

"Решение". (Ответы).

а). В соответствии с (1.8) в декартовой системе координат x, y, z пространственная производная $\text{grad } T = \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}$. Поэтому в примере "а"

получаем: $\text{grad } T = -3C \cdot (\mathbf{1}_x \cdot x + \mathbf{1}_y \cdot y + \mathbf{1}_z \cdot z) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

б). В соответствии с (1.8, 1.5) в сферической системе координат R, θ, φ производная $\text{grad } T = \mathbf{1}_R \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\mathbf{1}_\theta}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{1}_\varphi}{R \cdot \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$. В примере "б" $\partial T / \partial \theta = 0, \partial T / \partial \varphi = 0$.

Поэтому в примере "б" получаем: $\text{grad } T = \mathbf{1}_R \cdot 2C \cdot R$.

1.8. Поток вектора \mathbf{M} и пространственная производная $\text{div } \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}

1.8.1. Поток вектора \mathbf{M} через ориентированную элементарную площадку dS и поверхность S

Определим сначала понятие "поток $d\Psi$ вектора (векторного поля) \mathbf{M} через бесконечно малый элемент dS поверхности S " - потока \mathbf{M} через ориентированную элементарную площадку dS с выбранным направлением нормали n к dS (рис. 1.11,а). Поток $d\Psi$ вектора \mathbf{M} через dS : $d\Psi = M \cdot dS \cdot \cos(\mathbf{M}, n)$. Отсюда следует, что $d\Psi$ - скалярная величина, знак которой совпадает со знаком косинуса угла между направлениями вектора \mathbf{M} и нормали n к dS .

Удобно пользоваться таким понятием, как ориентированная элементарная площадка $d\mathbf{S}$ - вектора $d\mathbf{S}$ с абсолютной величиной, равной площади dS , размерностью m^2 и направлением $d\mathbf{S}$ по нормали n к dS ($|d\mathbf{S}| = dS, d\mathbf{S} \parallel n$). Тогда, в соответствии с (1.1), поток $d\Psi$ можно выразить скалярным произведением: $d\Psi = (\mathbf{M} d\mathbf{S})$.

Поток Ψ вектора \mathbf{M} через поверхность S (рис. 1.11,б) определяет интеграл по этой поверхности S : $\Psi = \int_S d\Psi$, то есть $\Psi = \int_S (\mathbf{M} d\mathbf{S})$. Из этого

следует, что поток Ψ - скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Если, например, как это показано на рис. 1.11,б, углы между направлениями векторов \mathbf{M} на S и

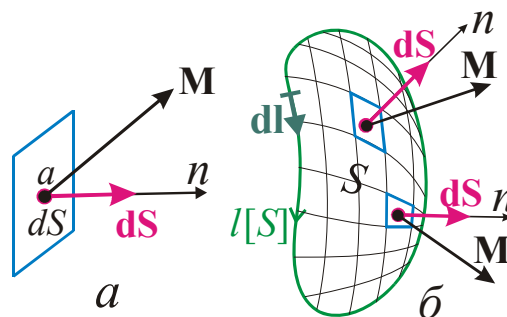


Рис. 1.11.

К определению понятий: поток вектора \mathbf{M} через элементарную площадку dS с нормалью n (а) и поток вектора \mathbf{M} через поверхность S , ограниченную (замкнутой) линией $l[S]$ (б)

направлениями нормалей n к S - острые (или нулевые) на всей поверхности S , то поток $\Psi = \int_S (\mathbf{M} \, d\mathbf{S}) > 0$.

Поток Ψ поля \mathbf{M} через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область пространства V , будем обозначать следующим образом: $\Psi = \oint_{S[V]} (\mathbf{M} \, d\mathbf{S})$. В этом случае будем полагать, что нормали n к

$S[V]$ и, соответственно, векторы $d\mathbf{S}$ направлены наружу относительно области пространства V (рис. 1.12,а). Поток Ψ вектора \mathbf{M} (точнее - векторного поля \mathbf{M}) через $S[V]$ тесно связан с расположенными в V источниками поля \mathbf{M} . Во многих случаях знак потока Ψ через границу $S[V]$ области пространства V отражает некоторые "геометрические" особенности поля \mathbf{M} в области V и на её границе $S[V]$.

На рис. 1.12,б - 1.12,г показаны (возможные) направления векторов \mathbf{M} на поверхности $S[V]$ с наружной (относительно области пространства V) нормалью n (рис. 1.12,а) и векторные линии l_M в окрестности области.

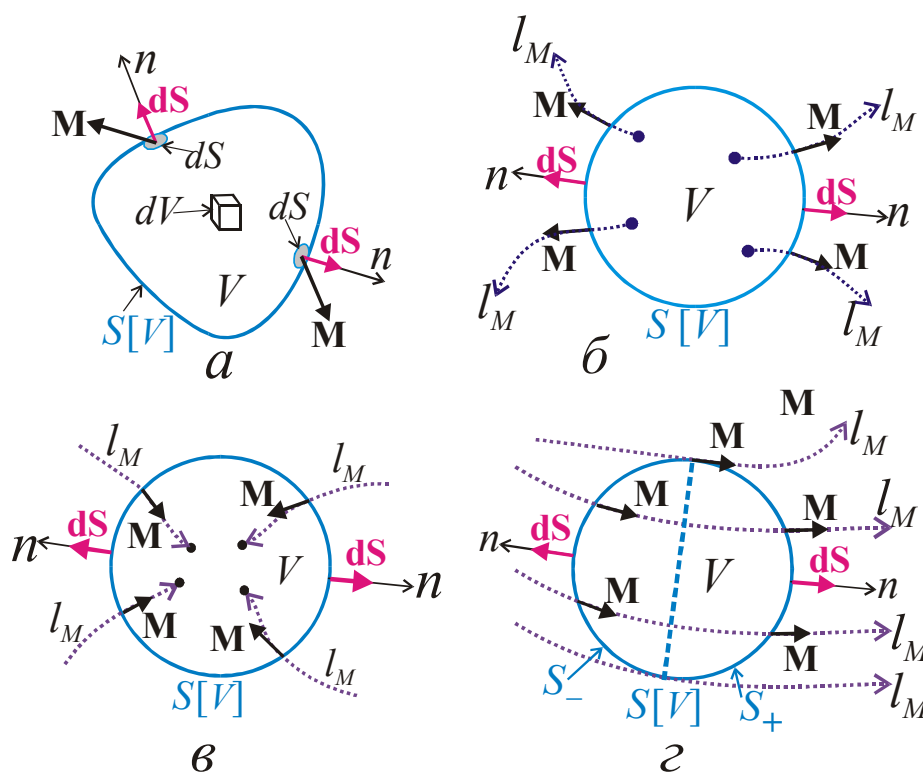


Рис. 1.12.

К определению понятия поток вектора \mathbf{M} через замкнутую поверхность $S[V]$

Видно, что в показанном на рис. 1.12,б случае линии l_M имеют начало в точках, расположенных в области V , и "выходят" из этой области. При этом поток Ψ вектора \mathbf{M} через поверхность $S[V]$ - положителен ($\Psi > 0$).

На рис. 1.12,в показаны возможные направления линий l_M в том случае, когда поток Ψ через замкнутую поверхность $S[V]$ - отрицателен. При этом векторные линии l_M "входят" в область V и оканчиваются внутри этой области. На рис. 1.12,г векторные линии l_M "проходят" через

область V , не начинаясь и не оканчиваясь в этой области. В этом случае поток $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, где $\Psi_+ > 0$ и $\Psi_- < 0$ - потоки вектора \mathbf{M} через две части S_+ и S_- поверхности $S[V]$ (см. рис. 1.12,з). Если потоки Ψ_+ и Ψ_- одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку ($\Psi_- = -\Psi_+$), то поток вектора \mathbf{M} через поверхность $S[V]$ $\Psi=0$.

1.8.2. Производная $\text{div } \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}

Дивергенция (div) - первая (скалярная) пространственная производная векторного поля \mathbf{M} . Производная $\text{div } \mathbf{M}(a)$ - скалярное поле. По определению

$$\text{div } \mathbf{M}(a) = \frac{\oint_{S[dV]} (\mathbf{M} \, d\mathbf{S})}{dV}, \quad (1.11)$$

где точка a - центр бесконечно-малой области пространства с объёмом dV , а $S[dV]$ - ограничивающая эту область замкнутая поверхность (рис. 1.13,а).

Так как величина $dV > 0$, то в (1.11) знаки $\text{div } \mathbf{M}$ и потока $\oint_{S[dV]} (\mathbf{M} \, d\mathbf{S})$ -

одинаковы. Поэтому если, например, на рис. 1.12,б,в заменить области V на элементарные объёмы dV с центрами в точках a , то первый из этих рисунков будет иллюстрировать возможные особенности "поведения" поля \mathbf{M} в окрестности точки a при $\text{div } \mathbf{M}(a) > 0$, а второй - при $\text{div } \mathbf{M}(a) < 0$. Производная $\text{div } \mathbf{M}$ тесно связана с плотностью источников поля \mathbf{M} . Говорят, что в тех точках a , где $\text{div } \mathbf{M}(a) \neq 0$, находятся *источники поля \mathbf{M}* . Иногда применяют следующую ("пришедшую", возможно из аэродинамики, либо гидродинамики) терминологию. Там, где $\text{div } \mathbf{M}(a) > 0$ - *истоки* поля \mathbf{M} , а там, где $\text{div } \mathbf{M}(a) < 0$ - *стоки* поля \mathbf{M} .

Определяющее понятие $\text{div } \mathbf{M}(a)$ выражение (1.11), с иллюстрацией в

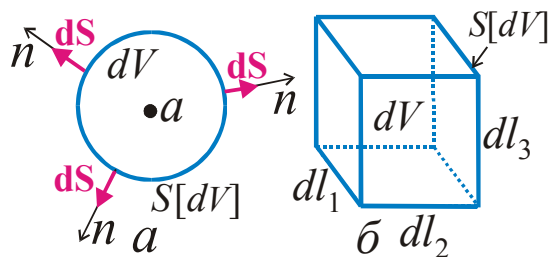


Рис. 1.13.

К определению пространственной производной $\text{div } \mathbf{M}$

выражение (1.11) к координатному элементу объёма - прямоугольному параллелепипеду с рёбрами $dl_1 = h_1 \cdot d\xi_1$, $dl_2 = h_2 \cdot d\xi_2$, $dl_3 = h_3 \cdot d\xi_3$ (рис. 1.13,б) - элементарными отрезками координатных линий l_1, l_2, l_3 можно выразить $\text{div } \mathbf{M}$ через производные. В частности, в декартовых координатах, где

виде рис. 1.12 позволяют показать то, какие "геометрические" особенности поля $\mathbf{M}(a)$ характеризует производная $\text{div } \mathbf{M}$. Но воспользоваться выражением (1.11) для расчёта $\text{div } \mathbf{M}$ совсем не просто. Это выражение можно упростить для расчёта $\text{div } \mathbf{M}$ в системах ортогональных координат. В учебнике [Альпин и др., 1985] (с. 24 - 25) показано, что применяя

$dl_1=dx, dl_2=dy, dl_3=dz, \mathbf{M} = \mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z$, пространственная производная

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (1.12)$$

"Задание". В декартовой системе координат доказать, что скалярное произведение $(\nabla \mathbf{M}) = \operatorname{div} \mathbf{M}$.

"Решение" (ответы). В соответствии с (1.4) и (1.9) (при заменах индексов: $1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z$) получаем следующее.

$$(\nabla \mathbf{M}) = \left(\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z \right\} \right). \quad \text{Принимая во}$$

внимание выражение (1.1) для скалярного произведения векторов и учитывая, что $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x) = 1, (\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y) = 0, (\mathbf{1}_x \mathbf{1}_z) = 0$ и т. д., получаем:

$$(\nabla \mathbf{M}) = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial M_y}{\partial y} + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial M_z}{\partial z} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}, \quad \text{что}$$

совпадает с выражением (1.12) для $\operatorname{div} \mathbf{M}$. Итак,

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = (\nabla \mathbf{M}). \quad (1.13)$$

1.9. Напряжение поля \mathbf{M} и циркуляция; пространственная производная $\operatorname{rot} \mathbf{M}$ поля \mathbf{M}

1.9.1. Напряжения $d\mathcal{E}, \mathcal{E}$, и циркуляция \mathcal{C} поля \mathbf{M}

По определению напряжение $d\mathcal{E}$ поля \mathbf{M} на элементарном ориентированном отрезке ("пути") $d\mathbf{l}$ определяет выражение: $d\mathcal{E} = M \cdot dl \cdot \cos(\mathbf{M}, d\mathbf{l}) =$

$= (\mathbf{M} d\mathbf{l})$ (рис. 1.14,а), где $dl = |d\mathbf{l}|$ - длина этого отрезка. При остром (или нулевом) угле $\mathbf{M}, d\mathbf{l}$ напряжение $d\mathcal{E} > 0$; при тупом (или равном π) угле $\mathbf{M}, d\mathbf{l}$ напряжение $d\mathcal{E} < 0$, а, если этот угол - прямой, то $d\mathcal{E} = 0$.

Напряжение \mathcal{E}_{12} на "пути" l из точки "1" в точку "2" (направленной линии l с началом в точке "1" и концом в точке "2", см. рис. 1.14,б) определяет криволинейный

$$\text{интеграл: } \mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\mathbf{M} d\mathbf{l}).$$

Понятно, что в зависимости от направлений поля \mathbf{M} в точках линии l и направлений элементарных отрезков $d\mathbf{l}$ этой линии скалярная величина \mathcal{E}_{12} (напряжение поля \mathbf{M}) может

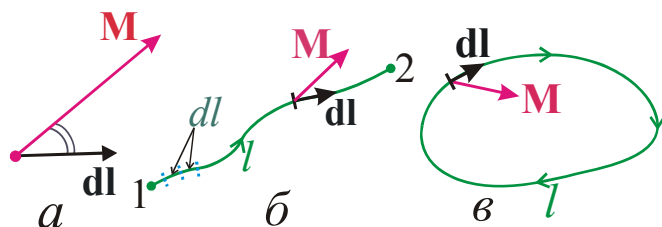


Рис. 1.14.

Напряжение поля \mathbf{M} на элементарном отрезке ("пути") $d\mathbf{l}$ (а), по линии ("пути") l (б), циркуляция - напряжение поля \mathbf{M} по замкнутой линии l (в)

быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Циркуляция \mathcal{C} - напряжение векторного поля на замкнутой направленной линии l (то есть при заданном направлении перемещения точки по этой линии): $\mathcal{C} = \oint_l (\mathbf{M} \, d\mathbf{l})$. Подобно такому понятию, как "поток

вектора через замкнутую поверхность", циркуляция \mathcal{C} характеризует, в частности, некоторые "геометрические" особенности поля \mathbf{M} .

На рис. 1.15,а приведен пример для случая, когда поле \mathbf{M} - однородно, то есть векторы \mathbf{M} одинаковы во всех точках рассматриваемой области пространства, а векторные линии l_M - взаимно параллельные прямые. Пунктиром показана замкнутая направленная линия l в форме прямоугольника с вершинами в точках "1", "2", "3", "4". На сторонах l_{23} и l_{41} прямоугольника отрезки $d\mathbf{l} \perp \mathbf{M}$ и скалярное произведение $(\mathbf{M} \, d\mathbf{l}) = 0$, на стороне l_{12} $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{M}$ и $(\mathbf{M} \, d\mathbf{l}) = M \cdot dl$, а на стороне l_{34} $d\mathbf{l} \updownarrow \mathbf{M}$ (векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{M} - антипараллельны) и $(\mathbf{M} \, d\mathbf{l}) = -M \cdot dl$. Ясно, что циркуляция по такой линии l : $\oint_l (\mathbf{M} \, d\mathbf{l}) = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{23} + \mathcal{E}_{34} + \mathcal{E}_{41} = M \cdot l_{12} + 0 - M \cdot l_{34} + 0 = 0$, так как длины отрезков l_{12} и l_{34} одинаковы.

На рис. 1.15,б векторные линии l_M поля \mathbf{M} - замкнутые. Понятно, что, (по крайней мере) по линиям l_M циркуляция $\mathcal{C} = \oint_{l_M} (\mathbf{M} \, d\mathbf{l}) \neq 0$, так как, в зависимости от выбранного направления обхода линии l_M , углы между направлениями \mathbf{M} и $d\mathbf{l}$ равны нулю либо π . При показанном на рисунке пунктирной линией направлении обхода линии l эти углы равны нулю и по этой линии $\mathcal{C} > 0$.

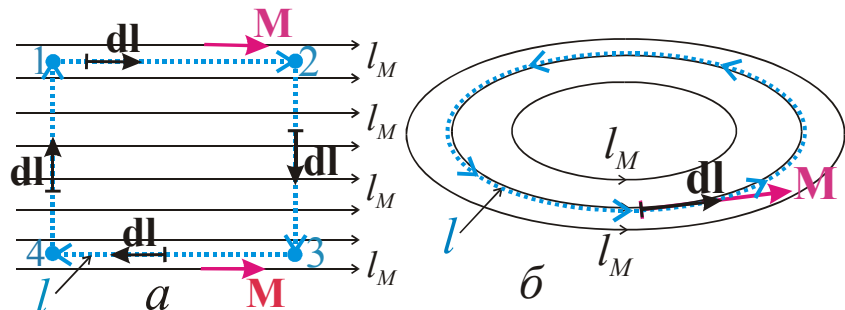


Рис. 1.15.

Примеры полей \mathbf{M} с нулевой (а) и ненулевой (б) циркуляцией \mathcal{C} .

1.9.2. Производная ротор поля \mathbf{M}

Ротор (rot, а в связанных с теорией поля работах на английском языке - curl) - первая пространственная (векторная) производная векторного поля \mathbf{M} . Производная rot \mathbf{M} - векторное поле. По определению скалярная компонента вектора rot $\mathbf{M}(a)$ по направлению n :

$$rot_n \mathbf{M}(a) = \frac{\oint (\mathbf{M} \, d\mathbf{l})}{dS}, \quad (1.14)$$

где n - нормаль к элементарной площадке dS (с центром в точке a), ограниченной замкнутой линией $l[dS]$ (рис. 1.16,а). Направление обхода по линии $l[dS]$ образует правовинтовую систему с направлением нормали n . Из (1.14) следует, что скалярная компонента $rot_n \mathbf{M}(a)$ имеет тот же знак, что циркуляция $\oint_{l[dS]} (\mathbf{M} d\mathbf{l})$. При $\oint_{l[dS]} (\mathbf{M} d\mathbf{l})=0$ компонента $rot_n \mathbf{M}(a)=0$.

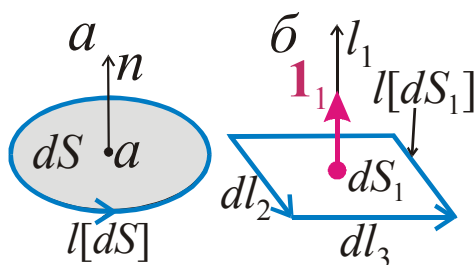


Рис. 1.16.

К определению компоненты вектора $rot \mathbf{M}$

В системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 можем получить более простые, чем (1.14), выражения для компонент вектора $rot \mathbf{M}$. Пусть на координатной поверхности $\xi_1=const$ лежит координатная площадка dS_1 в виде бесконечно-малого прямоугольника со сторонами dl_2, dl_3 и нормалью по направлению $\mathbf{1}_1$ (рис. 1.16,б). Применяя выражение (1.14) к площадке $dS_1=dl_2 \cdot dl_3$, можем выразить компоненту

$rot_1 \mathbf{M}$ через производные компонент \mathbf{M} (см. [Альпин и др., 1985], с. 21-22). В частности, в декартовых координатах, где $dl_2=dy, dl_3=dz, dS_1=dS_x=dy \cdot dz, \mathbf{1}_1=\mathbf{1}_x, \dots, \mathbf{M}=\mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z$, для скалярной и векторной компонент поля $rot \mathbf{M}$ по направлению оси X получаем:

$$rot_x \mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \quad rot_x \mathbf{M} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right).$$

можем определить две другие компоненты $rot \mathbf{M}$. Складывая векторные компоненты, получаем выражение для $rot \mathbf{M}$ в декартовых координатах:

$$rot \mathbf{M} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right). \quad (1.15)$$

В тех областях пространства (линиях, поверхностях), где $rot \mathbf{M} \neq 0$, находятся "вихри" поля \mathbf{M} (источники поля \mathbf{M} вихревого типа).

"Задание". В декартовой системе координат доказать, что векторное произведение $[\nabla \mathbf{M}] = rot \mathbf{M}$.

"Решение". (ответы). В соответствии с (1.9) и (1.4) (при заменах индексов: $1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z$) получаем следующее.

$$[\nabla \mathbf{M}] = \left[\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \mathbf{1}_x M_x + \mathbf{1}_y M_y + \mathbf{1}_z M_z \right\} \right].$$

Принимая во внимание выражение (1.2) для векторного произведения векторов и учитывая, что $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x]=0, [\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y]=\mathbf{1}_z, [\mathbf{1}_x \mathbf{1}_z]=-\mathbf{1}_y$ и т. п., получаем:

$$[\nabla \mathbf{M}] = 0 + \mathbf{1}_z \frac{\partial M_y}{\partial x} - \mathbf{1}_y \frac{\partial M_z}{\partial x} - \mathbf{1}_z \frac{\partial M_x}{\partial y} + 0 + \mathbf{1}_x \frac{\partial M_z}{\partial y} + \mathbf{1}_y \frac{\partial M_x}{\partial z} - \mathbf{1}_x \frac{\partial M_y}{\partial z} + 0 =$$

$$= \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right), \text{ что совпадает с}$$

выражением (1.15) для $\text{rot } \mathbf{M}$. Итак,

$$\text{rot } \mathbf{M} = [\nabla \mathbf{M}]. \quad (1.16)$$

"Задание". Получить выражения для пространственных производных $\text{div } \mathbf{M}$, $\text{rot } \mathbf{M}$ полей \mathbf{M} , заданных в системах ортогональных координат x, y, z или R, θ, φ .

а) $\mathbf{M} = \mathbf{1}_x C \cdot x^2$; б) $\mathbf{M} = \mathbf{1}_y C \cdot x^2$; в) $\mathbf{M} = \mathbf{1}_R C \cdot R$; г) $\mathbf{M} = \mathbf{1}_\varphi C \cdot \sin\theta/R$.

"Решение". (Ответы).

а) $\text{div } \mathbf{M} = 2 \cdot C \cdot x$, $\text{rot } \mathbf{M} = 0$; б) $\text{div } \mathbf{M} = 0$, $\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{1}_z \cdot 2 \cdot C \cdot x$;

в) $\text{div } \mathbf{M} = C \cdot R$, $\text{rot } \mathbf{M} = 0$; г) $\text{div } \mathbf{M} = 0$, $\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{1}_R \cdot 2C \cdot \cos\theta/R^2$.

1.9.3. Потенциальные и соленоидальные векторные поля

Выражения для производных $\text{rot } \mathbf{M}$ и $\text{div } \mathbf{M}$ составляют систему уравнений поля \mathbf{M} в дифференциальной форме. Для (любого по физической природе) поля \mathbf{M} в зависимости от того, равны или не равны эти производные нулю, применяют следующую терминологию.

Если $\text{rot } \mathbf{M} \equiv 0$, $\text{div } \mathbf{M} \neq 0$, то поле \mathbf{M} - *потенциальное (безвихревое)*. Применяя обозначение " $\neq 0$ " здесь и ниже будем понимать это так, что производная поля \mathbf{M} не равна нулю хотя бы в некоторых областях или точках пространства. В других областях или точках эта производная может быть равна нулю.

Если $\text{rot } \mathbf{M} \neq 0$, $\text{div } \mathbf{M} \equiv 0$, то поле \mathbf{M} - *соленоидальное (чисто вихревое)*.

В соответствии с *теоремой разложения Гельмгольца* ([Корн, Корн, 1970], с. 173- 174) при выполнении некоторых, "не обременительных" для реальных физических полей условий, любое векторное поле $\mathbf{M}(a)$ может быть представлено в виде суммы:

$$\mathbf{M}(a) = \mathbf{M}_\Pi(a) + \mathbf{M}_C(a), \quad (1.17)$$

где $\text{rot } \mathbf{M}_\Pi \equiv 0$, $\text{div } \mathbf{M}_C \equiv 0$. То есть поле $\mathbf{M}(a)$ можно представить, как сумму потенциального поля \mathbf{M}_Π и соленоидального поля \mathbf{M}_C .

1.9.4. Вторые производные скалярного поля T

Итак, первые пространственные производные скалярного поля $T(a)$ это: векторное поле $\text{grad}T(a)$. Понятно, что это векторное поле тоже имеет пространственные производные: $\text{div grad}T(a)$ и $\text{rot grad}T(a)$. Это - вторые пространственные производные скалярного поля T .

"Задание". Получить выражения для пространственных производных а). $\text{div grad}T$, б). $\text{rot grad}T$ поля T в декартовой системе ортогональных координат x, y, z .

"Решение". (Ответы).

а). В соответствии с (1.8), (1.9), и учитывая, что $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x) = 1$, $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y) = 0$, $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_z) = 0$ и т. д., получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} T &= (\nabla \nabla T) = \\ &= \left(\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Итак, одна из вторых производных скалярного поля T :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} T = (\nabla \nabla T) = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (1.18)$$

∇^2 - оператор Лапласа. В декартовых координатах $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

б). В соответствии с (1.8), (1.9), при учёте того, что векторные произведения $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x]=0$, $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y]=\mathbf{1}_z$, $[\mathbf{1}_y \mathbf{1}_x]=-\mathbf{1}_z$ и т.д., получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} T &= [\nabla \nabla T] = \left[\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial T}{\partial z} \right\} \right] = \\ &= 0 + \mathbf{1}_z \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - \mathbf{1}_y \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} - \mathbf{1}_z \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 0 + \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + \mathbf{1}_y \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} - \mathbf{1}_x \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + 0 \equiv 0, \end{aligned}$$

то есть одна из вторых производных скалярного поля T

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} T \equiv 0. \quad (1.19)$$

1.9.5. Вторые производные векторного поля \mathbf{M}

Это производные: 1) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{M}$, 2) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{M}$, 3) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M}$, 4) $\nabla^2 \mathbf{M}$.

По определению последнюю из этих производных в ортогональных декартовых координатах x, y, z определяет следующее выражение:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{M} &= \mathbf{1}_x \nabla^2 M_x + \mathbf{1}_y \nabla^2 M_y + \mathbf{1}_z \nabla^2 M_z = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где лапласианы ∇^2 скалярных декартовых компонент M_x, M_y, M_z ($\nabla^2 M_x, \nabla^2 M_y, \nabla^2 M_z$) определяют выражения, аналогичные выражению

(1.18) для лапласиана $\nabla^2 T$ скалярного поля T .

"Задание". Доказать, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M} \equiv 0$.

"Решение". (Ответ).

В соответствии с (1.9), (1.15), при учёте того что, скалярные произведения $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x)=1$, $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y)=0$, $(\mathbf{1}_x \mathbf{1}_z)=0$ и т. д., получаем:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{M} = (\nabla \operatorname{rot} \mathbf{M}) =$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \cdot \\
 & \cdot \left\{ \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \right\} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + 0 + 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = \\
 & = \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y \partial z} \right) = 0. \text{ Следовательно} \\
 & \text{div rot } \mathbf{M} \equiv 0. \tag{1.21}
 \end{aligned}$$

"Задание". Получить выражения для пространственных производных поля \mathbf{M} (и их разности) в декартовых координатах x, y, z .

a) grad div \mathbf{M} . б) rot rot \mathbf{M} . в) Доказать, что grad div \mathbf{M} – rot rot $\mathbf{M} \equiv \nabla^2 \mathbf{M}$.

"Решение". (Ответы).

a). В соответствии с (1.8), (1.9), (1.12)

$$\text{grad div } \mathbf{M} = \nabla \nabla \mathbf{M} = \left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} \right\}. \text{ Отсюда}$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 \text{grad div } \mathbf{M} = & \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right) + \\
 & + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right). \tag{1.22}
 \end{aligned}$$

б). В соответствии с (1.9), (1.15), (1.16), при учёте того, что векторные произведения $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_x]=0$, $[\mathbf{1}_x \mathbf{1}_y]=\mathbf{1}_z$, $[\mathbf{1}_y \mathbf{1}_x]=-\mathbf{1}_z$ и т. д. имеем:

$$\begin{aligned}
 \text{rot rot } \mathbf{M} & = [\nabla \text{ rot } \mathbf{M}] = \\
 & = \left[\left\{ \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \times \right. \\
 & \times \left. \left\{ \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \right\} \right] = \\
 & = 0 + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} \right) - \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} \right) - \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} \right) + 0 + \\
 & = \\
 & + \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) - \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \right) + 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{M} = & \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + \\ & + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.23)$$

е). В соответствии с (1.22), (1.23), получаем:
grad div \mathbf{M} – rot rot \mathbf{M} =

$$\begin{aligned} & = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} \right) \\ & + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} \right) - \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + \\ & - \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) - \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} \right) = \\ & = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + \\ & + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) + \\ & + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} \right) = \\ & = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} \right) + \\ & + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

При сравнении последнего выражения с равенством (1.20) видим, что
grad div \mathbf{M} – rot rot \mathbf{M} = $\nabla^2 \mathbf{M}$. (1.24)

1.10. Тензорные величины и поля, их преобразование при повороте осей декартовых координат

1.10.1. Тензорные величины и поля

В отличие от вектора \mathbf{M} , который (в трёхмерном пространстве) в системе координат можно выразить 3-мя скалярными компонентами (M_x ,

M_y, M_z) для определения тензора нужно большее число скалярных компонент.

Примером тензорной величины, определяемой в одном из электромагнитных методов геофизики - магнитотеллурических зондированиях (МТЗ), является импеданс (волновое сопротивление) \mathcal{Z} . В методе магнитотеллурических зондирований на основе измерений напряжений электрического поля \mathbf{E} в расположенных на поверхности земли взаимно-ортогональных (горизонтальных) измерительных линиях $MN, M'N'$ определяют компоненты E_x, E_y электрического поля. При помощи измерений (обусловленных переменным магнитным полем \mathbf{H}) напряжений в имеющих соответствующую ориентацию индукционных датчиках определяют компоненты: H_x, H_y, H_z магнитного поля \mathbf{H} .

Для интерпретации результатов измерений в МТЗ служат шесть компонент тензора импеданса: $\mathcal{Z}_{xy}=E_x/H_y, \mathcal{Z}_{yx}=E_y/H_x, \mathcal{Z}_{xz}=E_x/H_z, \mathcal{Z}_{yz}=E_y/H_z, \mathcal{Z}_{xx}=E_x/H_x, \mathcal{Z}_{yy}=E_y/H_y$. Эти компоненты тензора импеданса зависят от геоэлектрического разреза, но не зависят от неизвестных (не контролируемых) в МТЗ возбудителей электромагнитного поля в этом методе (токов в ионосфере и дальних гроздовых разрядов).

В этом разделе курса мы будем рассматривать другие тензоры - истинные (аффинные ортогональные) тензоры второго ранга. Такие тензоры определяют девять скалярных компонент. В декартовых координатах эти компоненты удовлетворяют определённым правилам преобразования при повороте осей X, Y, Z декартовых координат.

Если тензор является функцией положения точки (наблюдения) a в пространстве, то это - тензорное поле. К сожалению, в отличие от скалярного поля T (уровневые поверхности или линии $T=\text{const}$), либо векторного поля \mathbf{M} (векторные линии l_M), тензорное поле не имеет наглядной "геометрической интерпретации".

1.10.2. Преобразование истинного тензора (тензорного поля) второго ранга при повороте осей декартовых координат

Пусть в декартовой системе координат x, y, z с осями X, Y, Z тензорное поле (поле истинного тензора второго ранга) \hat{a} определяют следующие 9 скалярных компонент: $a_{xx}, a_{xy}, a_{xz}, a_{yx}, a_{yy}, a_{yz}, a_{zx}, a_{zy}, a_{zz}$. Для такого тензора \hat{a} применяют обозначение:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}.$$

При повороте осей X, Y, Z декартовых координат и при их "новых" направлениях X', Y', Z' (и фиксированном положении точки наблюдения) истинный тензор второго ранга должен удовлетворять определённым правилам преобразования компонент. Приведём примеры. При

одинаковых индексах компонент тензора \hat{a} в "новой" системе координат, например для компоненты $a_{x'x'}$ справедливо выражение:

$$a_{x'x'} = a_{xx} \cos^2(X', X) + a_{yx} \cos(X', Y) \cos(X', X) + a_{zx} \cos(X', Z) \cos(X', X) + \\ + a_{xy} \cos(X', X) \cos(X', Y) + a_{yy} \cos^2(X', Y) + a_{zy} \cos(X', Z) \cos(X', Y) + \\ + a_{xz} \cos(X', X) \cos(X', Z) + a_{yz} \cos(X', Y) \cos(X', Z) + a_{zz} \cos^2(X', Z).$$

или

$$a_{x'x'} = [a_{xx} \cos(X', X) + a_{yx} \cos(X', Y) + a_{zx} \cos(X', Z)] \cos(X', X) + \\ + [a_{xy} \cos(X', X) + a_{yy} \cos(X', Y) + a_{zy} \cos(X', Z)] \cos(X', Y) + \\ + [a_{xz} \cos(X', X) + a_{yz} \cos(X', Y) + a_{zz} \cos(X', Z)] \cos(X', Z). \quad (1.25)$$

При разных индексах компонент тензора \hat{a} в "новой" системе координат, например, для компонент $a_{x'y'}$, $a_{x'z'}$ справедливы, выражения:

$$a_{x'y'} = [a_{xx} \cos(X', X) + a_{yx} \cos(X', Y) + a_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Y', X) + \\ + [a_{xy} \cos(X', X) + a_{yy} \cos(X', Y) + a_{zy} \cos(X', Z)] \cos(Y', Y) + \\ + [a_{xz} \cos(X', X) + a_{yz} \cos(X', Y) + a_{zz} \cos(X', Z)] \cos(Y', Z). \quad (1.26)$$

$$a_{x'z'} = [a_{xx} \cos(X', X) + a_{yx} \cos(X', Y) + a_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Z', X) + \\ + [a_{xy} \cos(X', X) + a_{yy} \cos(X', Y) + a_{zy} \cos(X', Z)] \cos(Z', Y) + \\ + [a_{xz} \cos(X', X) + a_{yz} \cos(X', Y) + a_{zz} \cos(X', Z)] \cos(Z', Z). \quad (1.26a)$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Теория упругости - это один из разделов *механики сплошной среды*. Это означает, что при применении некоторых законов *физики* мы будем применять "макроскопический подход" и, отвлекаясь от атомарно-молекулярного строения вещества, полагать, что упругая среда - сплошная.

В теории упругости изучают упругие напряжения, упругие деформации и связь между ними. При этом принимают допущение, что деформации - бесконечно малы и (в абсолютно-упругой среде) пропорциональны вызвавшим эти деформации упругим напряжениям. Законы и уравнения теории упругости служат для обоснования теории распространения упругих колебаний в абсолютно-упругой среде. Теория распространения упругих колебаний в такой среде это - одно из теоретических обоснований такого метода разведочной геофизики, как сейсморазведка.

2.1. Упругие напряжения, виды упругих напряжений

Пусть на упругое тело действуют "внешние" силы \mathbf{F} (рис. 2.1,а). Под действием сил \mathbf{F} упругое тело может изменить свою форму и объем и в этом теле возникнут некоторые "внутренние" силы. Говорят, что упругое тело находится в "напряжённом состоянии". Силы в таком упругом теле можно определить, пользуясь понятием "упругие напряжения". Как можно охарактеризовать упругие напряжения в произвольной точке a ?

Проделаем следующий "мысленный эксперимент". Разделим упругое тело на две части A, B частью S плоскости, проходящей через точку a , и отделим друг от друга эти части вместе с приложенными к ним силами \mathbf{F} . К части S плоскости (границе тел A, B) приложим такие силы, чтобы объёмы и формы тел A, B не изменились. Для этого, в частности, на элементарных площадках dS с (наружными по отношению к частям A, B упругого тела) нормальными n и центрами в точке a надо будет приложить силы $d\mathbf{P}_n$ (рис. 2.1,б). Индекс "n" у сил - векторов $d\mathbf{P}_n$ в данном случае обозначает не направления этих векторов, а то, что это - силы на площадках dS с нормальными n .

Вектор \mathbf{P}_n упругого напряжения на площадке dS с нормалью n определяет выражение: $\mathbf{P}_n = d\mathbf{P}_n / dS$. Ясно, что абсолютная величина вектора \mathbf{P}_n аналогична давлению (и имеет ту же, что у давления, размерность - H/m^2), но это - давление внутри упругого тела (упругой среды).

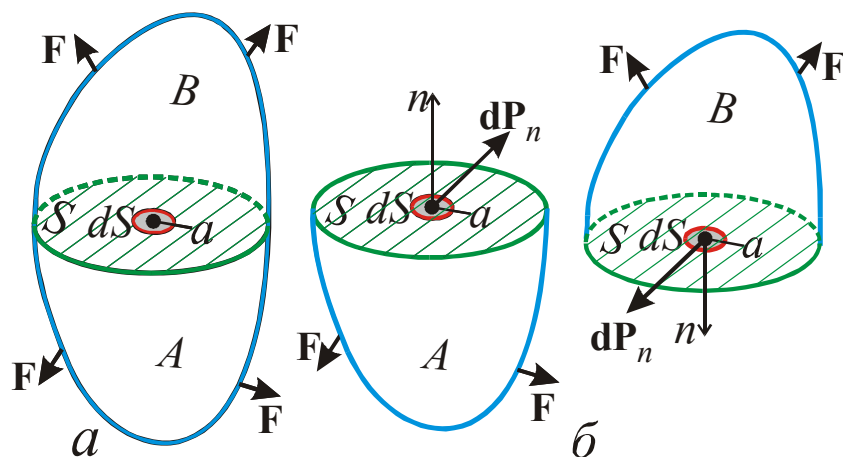


Рис. 2.1.

К определению вектора упругого напряжения

$$\mathbf{P}_n = d\mathbf{P}_n / dS$$

сумму векторных компонент. В декартовых координатах $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{nx} + \mathbf{P}_{ny} + \mathbf{P}_{nz} = \mathbf{1}_x P_{nx} + \mathbf{1}_y P_{ny} + \mathbf{1}_z P_{nz}$.

Первый индекс "n" у скалярных компонент P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} (по-прежнему) обозначает направление нормалей n к dS , а второй - то, проекцией на какую из осей X, Y, Z (или на орты $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$) является эта компонента. Но вектор напряжения \mathbf{P}_n не является величиной, достаточно общей для того, чтобы полностью охарактеризовать напряжённое

у силы $d\mathbf{P}_n$, у вектора упругого напряжения \mathbf{P}_n индекс "n" обозначает то, что это - упругое напряжение \mathbf{P}_n на элементарной площадке dS с нормалью n . Вектор \mathbf{P}_n можно представить как

состояние в точке a , так как этот вектор зависит не только от положения точки a в упругом теле, но и от ориентации dS (и, соответственно, от направления нормали n к элементарной площадке dS), то есть $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(a, n)$.

В декартовых координатах нормальными к площадкам dS могут быть оси X, Y, Z (или, точнее, направления ортов $\pm \mathbf{1}_x, \pm \mathbf{1}_y, \pm \mathbf{1}_z$). Векторы упругих напряжений на площадках с нормальными $\pm \mathbf{1}_x, \pm \mathbf{1}_y, \pm \mathbf{1}_z$ определим следующим образом: $\mathbf{P}_x = \mathbf{1}_x P_{xx} + \mathbf{1}_y P_{xy} + \mathbf{1}_z P_{xz}$, $\mathbf{P}_y = \mathbf{1}_x P_{yx} + \mathbf{1}_y P_{yy} + \mathbf{1}_z P_{yz}$, $\mathbf{P}_z = \mathbf{1}_x P_{zx} + \mathbf{1}_y P_{zy} + \mathbf{1}_z P_{zz}$. Как и ранее, первый индекс у компонент напряжений определяет направление нормали к площадке dS , а второй показывает то, проекциями на какую из осей декартовых координат являются компоненты P_{xx}, P_{xy}, P_{xz} и т. д.

На рис. 2.2,а показаны векторные компоненты $\mathbf{P}_{zx}, \mathbf{P}_{zy}, \mathbf{P}_{zz}$ вектора напряжения \mathbf{P}_z на элементарной координатной площадке dS_z с нормалью n , параллельной оси Z . Это одна из шести координатных площадок, ограничивающих координатный элемент объёма dV . Тангенциальные компоненты $\mathbf{P}_{zx}, \mathbf{P}_{zy}$ на dS_z направлены по касательным ("тангенциально") к координатной площадке dS_z , а нормальная компонента \mathbf{P}_{zz} - по нормали к этой площадке. Аналогичным образом на каждой из координатных площадок dS_x, dS_y с нормальными X, Y упругие напряжения характеризуют одна нормальная и две тангенциальные компоненты. Для шести тангенциальных и трёх нормальных компонент упругих напряжений на площадках dS_x, dS_y, dS_z в теории упругости применяют обозначения: $P_{xy} = \tau_{xy}, P_{zx} = \tau_{zx}, P_{zy} = \tau_{zy}, \dots, P_{xx} = \sigma_x, P_{yy} = \sigma_y, P_{zz} = \sigma_z$.

На рис. 2.2,б показаны сечение плоскостью $y = \text{const}$ координатного элемента объёма dV , векторы \mathbf{P}_z и их векторные компоненты $\mathbf{P}_{zx}, \mathbf{P}_{zz}$ на двух противоположных гранях координатного элемента объёма dV с нормальными $n \parallel Z$ и $n \uparrow \downarrow Z$. В показанном на 2.2,б случае векторы \mathbf{P}_z на этих двух гранях оказывают одинаковое деформирующее действие на элемент dV упругой среды. Но, если определять скалярные компоненты векторов \mathbf{P}_z на этих гранях по обычным правилам, в соответствии с выражениями (1.3), то они будут различаться по знаку.

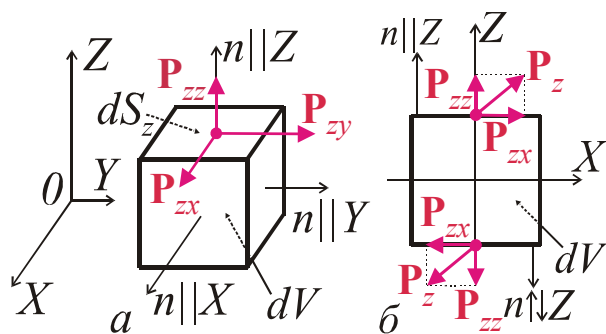


Рис. 2.2.

Векторы и векторные компоненты упругих напряжений

компоненты векторов \mathbf{P}_z на этих гранях по обычным правилам, в соответствии с выражениями (1.3), то они будут различаться по знаку.

Поэтому в теории упругости принято следующее правило определения скалярных компонент напряжений. Если, как на рис. 2.2,б $n \parallel Z$ или $n \uparrow \downarrow Z$, то

$$P_{zx} = \tau_{zx} = P_z \cos(\mathbf{P}_z, Z) \cos(n, Z), \dots, P_{zz} = \sigma_z = P_z \cos(\mathbf{P}_z, X) \cos(n, Z), \quad (2.1)$$

где $P_z = |\mathbf{P}_z|$, $\cos(n, Z) = 1$ при $n \parallel Z$, $\cos(n, Z) = -1$ при $n \uparrow \downarrow Z$, а n -нормаль к площадке, наружная по отношению к объёму dV . Тогда, в частности, компонента P_{zz} вызывает растяжение элементарного объёма dV по направлению оси Z при $P_{zz} > 0$ и сжатие элемента dV по направлению этой оси при $P_{zz} < 0$.

2.2. Тензор упругих напряжений

Итак, мы можем характеризовать упругое напряжение векторами \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z на 3-х взаимно-перпендикулярных элементарных координатных площадках dS_x , dS_y , dS_z или 9-ю скалярными компонентами этих векторов (3-мя нормальными напряжениями σ и 6-ю тангенциальными напряжениями τ). Достаточно ли этих 9-и скалярных величин для того, чтобы полностью определить напряжённое состояние в бесконечно-малой окрестности точки a упругой среды? Если это так, то по этим 9-и компонентам можно определить напряжение на произвольно ориентированной площадке в окрестности точки a . Проверим это, а также получим выражения, определяющие правила преобразования 9-и компонент упругих напряжений при повороте осей декартовых координат.

На рис. 2.3 показан элементарный объём dV упругой среды в форме четырёхгранника. Три ограничивающие его грани dS_x , dS_y , dS_z с (наружными по отношению к dV) нормальными по направлениям $-\mathbf{1}_x$, $-\mathbf{1}_y$, $-\mathbf{1}_z$, (противоположным направлениям соответственно ортов $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ и осей X , Y , Z) лежат в координатных плоскостях, а четвёртая грань dS с нормалью n ориентирована произвольно. Масса четырёхгранника $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, а dV - объём. По второму закону Ньютона

$$\mathbf{a} = \sum d\mathbf{F} / dm \quad \text{или} \quad \sum d\mathbf{F} = dm \mathbf{a}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{a} - ускорение, $\sum d\mathbf{F}$ - сумма сил, действующих на массу dm .

Различают объёмные и поверхностные силы: $\sum d\mathbf{F} = \sum d\mathbf{F}^{\text{объ}} + \sum d\mathbf{F}^{\text{пов}}$, где $d\mathbf{F}^{\text{объ}}$ - это одна из сил, действующих на всю массу dm (например, сила тяготения, сила инерции). Сумма $\sum d\mathbf{F}^{\text{объ}}$ пропорциональна dm . Поэтому обозначим $\sum d\mathbf{F}^{\text{объ}} = \mathbf{F} \cdot dm = \mathbf{F} \cdot \rho \cdot dV$. Здесь $\sum d\mathbf{F}^{\text{объ}} / dm = \mathbf{F}$ - сумма объёмных сил ("массовых сил"), отнесённая к единице массы; абсолютная величина $|\mathbf{F}| = F$ - конечная величина.

$\sum d\mathbf{F}^{\text{пов}}$ - сумма сил, действующих на поверхность объёма dV с массой dm . Для показанного на рис. 2.3 четырёхгранника $\sum d\mathbf{F}^{\text{пов}}$ - это сумма произведений упругих напряжений на 4-х гранях элементарного объёма dV на площади этих граней: $\mathbf{P}_x dS_x$, $\mathbf{P}_y dS_y$, $\mathbf{P}_z dS_z$, $\mathbf{P}_n dS_n$. Таким образом, из (2.2) получаем:

$$\mathbf{F} \rho dV + \mathbf{P}_x dS_x + \mathbf{P}_y dS_y + \mathbf{P}_z dS_z + \mathbf{P}_n dS_n = \rho dV \mathbf{a}. \quad (2.3)$$

В этом выражении P , F , a , ρ - конечные величины. Если полагать, что длины рёбер четырёхгранника (dx , dy , ...) - бесконечно-малые величины 1-го порядка, то площади граней ($dS_x = dy \cdot dz / 2$, $dS_y = dx \cdot dz / 2$, ...) - бесконечно-малые величины 2-го порядка, а объём $dV = (dx \cdot dy \cdot dz) / 6$ - бесконечно-малая величина 3-го порядка.

Пренебрегая в выражении (2.3) членами, содержащими бесконечно-малую величину 3-го порядка - множитель dV по сравнению с членами, содержащими бесконечно-малые величины 2-го порядка - множители dS_x , dS_y , dS_z , dS_n , получаем:

$$\mathbf{P}_n dS_n = -\mathbf{P}_x dS_x - \mathbf{P}_y dS_y - \mathbf{P}_z dS_z.$$

Перейдём от этого равенства векторов к равенствам компонент векторов по направлениям осей X , Y , Z . Учтём, что $dS_x = dS \cos(n, X)$, $dS_y = dS \cos(n, Y)$, $dS_z = dS \cos(n, Z)$. Так как (наружные по отношению к области dV) нормали n_x , n_y , n_z к площадкам dS_x , dS_y , dS_z антипараллельны осям X , Y , Z , то, принимая во внимание выражения (2.1), получаем следующие равенства для декартовых компонент векторов \mathbf{P}_n , \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y , \mathbf{P}_z :

$$\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx} \cos(n, X) + P_{yx} \cos(n, Y) + P_{zx} \cos(n, Z), \\ P_{ny} &= P_{xy} \cos(n, X) + P_{yy} \cos(n, Y) + P_{zy} \cos(n, Z), \\ P_{nz} &= P_{xz} \cos(n, X) + P_{yz} \cos(n, Y) + P_{zz} \cos(n, Z). \end{aligned}$$

Применяя для нормальных и тангенциальных компонент напряжений принятые в теории упругости обозначения ($P_{xx} = \sigma_x$, $P_{yx} = \tau_{yx}$, ...), получаем:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x \cos(n, X) + \tau_{yx} \cos(n, Y) + \tau_{zx} \cos(n, Z), \\ P_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, X) + \sigma_y \cos(n, Y) + \tau_{zy} \cos(n, Z), \\ P_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, X) + \tau_{yz} \cos(n, Y) + \sigma_z \cos(n, Z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из этих выражений следует, что по 9-и компонентам напряжений на площадках dS_x , dS_y , dS_z можно определить компоненты упругих напряжений P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} и вектор напряжения $\mathbf{P}_n = \mathbf{1}_x P_{nx} + \mathbf{1}_y P_{ny} + \mathbf{1}_z P_{nz}$ на произвольно ориентированной площадке

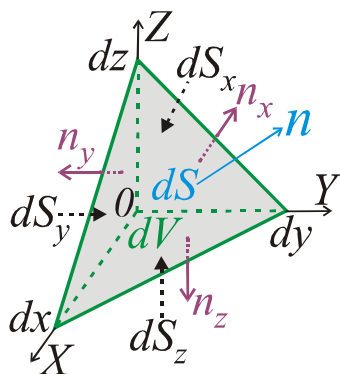


Рис. 2.3.

К определению упругого напряжения на произвольно ориентированной элементарной площадке dS с нормалью n

dS с нормалью n . Это означает, что девять компонент упругих напряжений $\sigma_x, \tau_{yx}, \dots$ полностью характеризуют напряжённое состояние в такой среде.

Пусть нам известны эти девять компонент напряжений в системе координат x, y, z с осями X, Y, Z . Получим выражения, определяющие компоненты напряжений в той же точке a упругой среды, но в другой системе координат x', y', z' с осями X', Y', Z' (при повороте осей декартовых координат). Заменяя в (2.4) направление n на направления X', Y', Z' , получаем 9 равенств:

$$\left. \begin{aligned} P_{x'x} &= \sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z), \\ P_{x'y} &= \tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z), \\ P_{x'z} &= \tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z), \\ P_{y'x} &= \sigma_x \cos(Y', X) + \tau_{yx} \cos(Y', Y) + \tau_{zx} \cos(Y', Z), \dots \end{aligned} \right\} (2.5)$$

В левых частях выражений (2.5) $P_{x'x}, P_{x'y}, \dots$ - компоненты напряжений по осям X, Y, Z на площадках с нормальми, коллинеарными осям X', Y', Z' . Воспользуемся правилами преобразования компонент векторного поля при повороте осей декартовых координат, которые определяют равенства (1.6):

$$\left. \begin{aligned} P_{x'x} &= \sigma_{x'} = P_{x'x} \cos(X', X) + P_{x'y} \cos(X', Y) + P_{x'z} \cos(X', Z), \\ P_{x'y} &= \tau_{x'y'} = P_{x'x} \cos(Y', X) + P_{x'y} \cos(Y', Y) + P_{x'z} \cos(Y', Z), \dots \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Подставляя (2.5) в правые части равенств (2.6), получаем выражения, определяющие правила преобразования компонент упругих напряжений при повороте осей декартовых координат. Например, для нормального напряжения $P_{x'x} = \sigma_{x'}$ справедливо выражение

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= [\sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z)] \cos(X', X) + \\ &+ [\tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z)] \cos(X', Y) + \\ &+ [\tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z)] \cos(X', Z). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогичным образом, например, для тангенциальной компоненты $\tau_{x'z'}$ получаем

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} &= [\sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Z', X) + \\ &+ [\tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z)] \cos(Z', Y) + \\ &+ [\tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z)] \cos(Z', Z). \end{aligned} \quad (2.7a)$$

В левой части равенств (2.7), (2.7a) - компоненты упругих напряжений в системе координат x', y', z' с осями X', Y', Z' , а в правой части - компоненты упругих напряжений в системе координат x, y, z с

осями X, Y, Z и косинусы углов между направлениями осей X', Y', Z' и осей X, Y, Z .

При сравнении выражений (2.7), (2.7a) с (1.25), (1.26) видим, что совокупность 9-и скалярных величин - компонент упругих напряжений σ и τ удовлетворяет правилам преобразования вида (1.25), (1.26) при повороте осей декартовых координат, то есть эти 9 величин - истинный тензор второго ранга. Итак, *тензор упругих напряжений*:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Иногда тензор упругих напряжений можно определить меньшим (чем 9) числом компонент. На рис. 2.4 видно, что тангенциальные компоненты напряжений могут вызвать повороты элементарных объёмов dV упругой среды. При $\tau_{xz} \neq \tau_{zx}$ существует вращающий момент, вызывающий поворот такого элементарного объёма dV вокруг оси Y .

Поэтому если таких поворотов - нет, либо мы их не рассматриваем (как при изучении "чистой деформации", см. раздел 2.5), то можем полагать, что $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ и тензор упругих напряжений характеризуют только 6 скалярных компонент.

При некоторых направлениях осей X, Y, Z тензор упругих напряжений принимает вид:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (2.8, a)$$

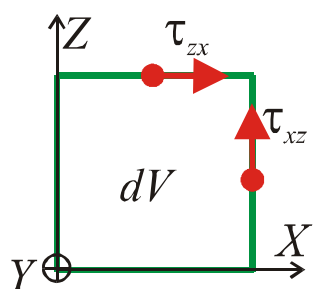


Рис. 2.4.

Тангенциальные упругие напряжения

В этом случае все тангенциальные компоненты τ тензора упругих напряжений равны нулю, а ненулевые нормальные компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ тензора упругих напряжений называют главными напряжениями, а направления осей X, Y, Z - главными направлениями тензора упругих напряжений. И, наконец, если все тангенциальные напряжения τ равны нулю, а $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$ (где P - давление), то этому отвечает (присущее жидкостям) явление "всестороннего сжатия".

2.3. Поле вектора смещения

Прямая задача теории распространения упругих колебаний - расчёт поля смещений \mathbf{U} и его производных по пространственным координатам и по времени t . Физический смысл вектора \mathbf{U} - очень простой.

Вектор смещения U характеризует величину и направление смещения точки a при деформации упругой среды, например, при действии сил на такую среду и существовании в среде упругих напряжений. Пусть до приложения к упругой среде сил и возникновения упругих напряжений точка a имела декартовы координаты x, y, z . После приложения к упругой среде сил точка a переместилась (на бесконечно-малое расстояние) - в точку a' с координатами $x+dx, y+dy, z+dz$ (рис. 2.5,а).

Вектор смещения U - это имеющий размерность расстояния (метры) вектор с началом в точке a и концом в точке a' . В декартовых координатах $U = \mathbf{1}_x dx + \mathbf{1}_y dy + \mathbf{1}_z dz$. В теории упругости

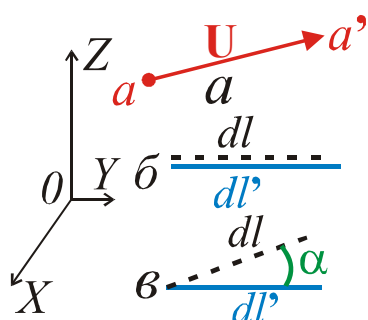


Рис. 2.5.

Вектор смещения U (в) и изменения элементарных отрезков dl (б, в)

для скалярных декартовых компонент вектора смещения приняты обозначения: $dx=U_x=U$, $dy=U_y=V$, $dz=U_z=W$, то есть в декартовых координатах (при применяемых в теории упругости обозначениях) вектор смещения

$$U = \mathbf{1}_x U + \mathbf{1}_y V + \mathbf{1}_z W. \quad (2.9)$$

Абсолютная величина вектора смещения U :

$$|U| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Отметим, что первая производная вектора U по времени t : $\partial U / \partial t$ равна вектору скорости V перемещения точки a , а вторая производная по времени вектора U : $\partial^2 U / \partial t^2$ равна ускорению \mathbf{a} элемента dV упругой среды с центром в этой точке.

2.4. Деформации

Если рассматривать деформации упругих тел конечных размеров, то число форм ("фигур"), в которое может, например, перейти тело в форме прямоугольного параллелепипеда, бесконечно-велико.

Поэтому, как принято в теории упругости, будем рассматривать деформации, которые могут произойти в упругой среде с элементарными отрезками dl , элементарными площадками dS (ограниченными отрезками dl) и элементарными объёмами dV (ограниченными площадками dS). На рис. 2.5, б, в, штриховыми линиями показаны отрезки dl до деформации упругой среды, а сплошными линиями показаны получаемые из dl в результате деформации отрезки dl' . Для элементарных отрезков dl результатом деформации таких отрезков в упругой среде может быть следующее.

1). Перемещение отрезка dl без изменения длины отрезка dl или его поворота.

2). Растяжение (рис. 2.5,б) или сжатие отрезка dl . При этом в теории упругости полагают, что отношение $(dl' - dl) / dl$ - бесконечно-малая

величина, то есть *относительное* изменение длины отрезка dl - бесконечно-мало.

3). Поворот отрезка на угол α , где α - бесконечно-малая величина (рис. 2.5,в). Далее будем полагать, что угол α - в радианах (безразмерная величина).

4). Совместное проявление тех явлений, которые описаны выше.

Деформации можно выразить через поле смещений U . Как связаны деформации с полем U ? Если в окрестности данной точки упругой среды поле U - однородно (рис. 2.6,а), то деформации - нет. Элементарный объём упругой среды без изменения формы и объёма перемещается в направлении вектора U на расстояние, равное абсолютной величине $|U|$ вектора смещения U .

На рис. 2.6,б показаны такие векторы смещения U в окрестности прямоугольного сечения элементарного объёма dV упругой среды, при которых объём dV испытывает растяжение по направлению оси X . В этом случае x -компонента U вектора смещения U растёт с увеличением координаты x и производная $\partial U / \partial x > 0$.

Напротив, при $\partial U / \partial x < 0$ (рис. 2.6,з) объём dV испытывает сжатие по направлению оси X . То есть

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x$$

производная характеризует деформации растяжения (при $\epsilon_x > 0$) или сжатия (при $\epsilon_x < 0$) по направлению оси X .

При показанном на рис. 2.6,в "равномерном" растяжении или сжатии области упругой среды (в форме прямоугольного параллелепипеда) по направлению оси X его относительное растяжение (или сжатие- "укорочение") $\Delta l_x / l_x$ равно производной $\partial U / \partial x$. То есть величина

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

характеризует относительные удлинения или сжатия элементов упругой среды по

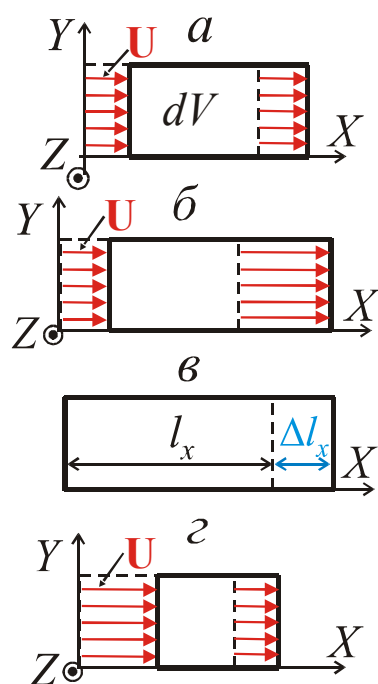


Рис. 2.6.

Смещения без деформаций (а) и деформации растяжения-сжатия (б- г)

по направлению оси X . Аналогичным образом

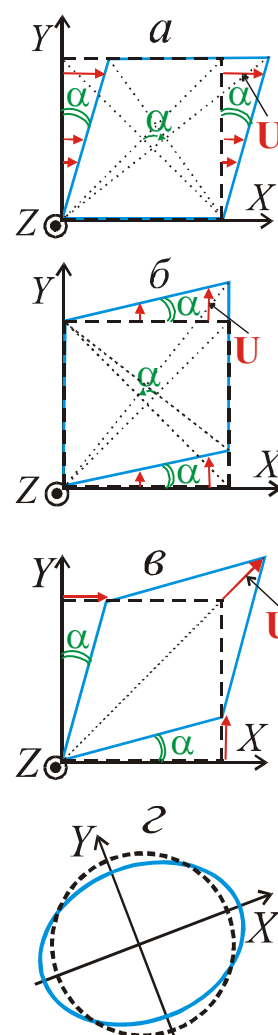


Рис. 2.7.

Деформации сдвига (а-в); главные направления тензора деформации (з)

производные $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$ характеризуют деформации растяжения-сжатия элементов dV упругой среды по направлениям осей Y, Z соответственно и имеют смысл относительных удлинений или сжатий элементов dV по направлениям этих осей.

Итак, величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, равные производным декартовых компонент $U_x=U, U_y=V, U_z=W$ соответственно по координатам x, y, z , характеризуют относительные растяжения - сжатия элементов упругой среды по направлениям осей X, Y, Z . Понятно, что при деформациях растяжения - сжатия могут меняться объёмы элементов dV упругой среды

А какие явления характеризуют производные скалярных декартовых компонент U, V, W , вектора смещения \mathbf{U} по направлениям, ортогональным направлениям компонент $\mathbf{1}_x U, \mathbf{1}_y V, \mathbf{1}_z W$, то есть производные $\partial U/\partial y, \partial V/\partial x, \dots$? На рис. 2.7,а показано то, что может произойти с лежащей в плоскости $z=\text{const}$ элементарной координатной площадкой со сторонами dx, dy в форме квадрата, если поле вектора смещения $\mathbf{U}=\mathbf{1}_x U$, а производная $\partial U/\partial y > 0$. То, как при этом изменится координатный элемент объёма dV (сечение которого показано на рис. 2.7,а), в теории упругости называют деформацией сдвига. Эта деформации может сопровождаться двумя следующими явлениями. 1) "чистая" деформация сдвига, связанная с изменением формы ("скошение" прямых углов у координатного элемента объёма dV); 2) поворот центра элемента dV вокруг оси Z на угол α .

Как видно на рис. 2.7,а, (при фиксированном значении координаты z) и при бесконечно-малом угле α ($\alpha \rightarrow 0$) производная $\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \text{tg}(\alpha) \approx \alpha$ (при угле α в радианах). Аналогично при $\alpha \rightarrow 0$ и $z=\text{const}$ получаем следующее. Производная $\frac{\partial V}{\partial x} = \text{tg}(\alpha) \approx \alpha$, рад (рис. 2.7,б).

2.5. Тензоры деформаций

Иногда тензор деформации представляют в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

В этом случае 3 компоненты тензора: $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$

характеризуют деформации растяжения-сжатия, а остальные 6 компонент связаны с изменением формы ("скошением прямых углов" у координатного элемента объёма dV) и поворотами таких элементов dV . Но эти повороты не характеризуют "чистую деформацию", связанную с изменением формы и объёма элементов dV .

На рис. 2.7,б показано, какие изменения с сечением координатного элемента объёма могут произойти в том случае, когда $U = 1_y V$ и производная $\partial V / \partial x > 0$. При сравнении рис. 2.7,а и рис. 2.7,б видно, что, если для описания чистой деформации сдвига воспользоваться полусуммой $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$, то производные $\partial V / \partial x$ и $\partial U / \partial y$ оказывают одинаковое влияние на изменение формы dV (чистую деформацию сдвига).

Поэтому тензор "чистой деформации" (без перемещения и поворотов элементарных объёмов dV) включает три компоненты деформации сжатия-растяжения и шесть компонент "чистой" деформации сдвига:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right), \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.10a)$$

Заметим, что повороты элементарных объёмов dV на рис. 2.7,а, 2.7,б имеют противоположные направления. То, что произойдет с лежащей в плоскости $z = \text{const}$ элементарной координатной площадкой со сторонами dx , dy при $\partial V / \partial x = \partial U / \partial y > 0$ и, соответственно, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} > 0$ показано на рис. 2.7,в. В этом случае при бесконечно-малых углах α (в радианах) компоненты тензора чистой деформации сдвига $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \partial V / \partial x = \partial U / \partial y = \text{tg } \alpha \approx \alpha$ (рад).

Отметим, что при деформациях сдвига (и бесконечно-малых углах α) не происходит изменения площадей показанных на рис. 2.7,а,б координатных площадок и объёмов dV элементов упругой среды. То есть при деформации сдвига, в отсутствие деформаций сжатия-растяжения, объёмы dV не меняются.

Из определения (2.10a) компонент тензора чистой деформации ($\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \dots$) ясно, что это- симметричный тензор и, даже в общем случае, чистую деформацию сдвига фактически определяют шесть скалярных величин.

Если, при некоторых направлениях осей X, Y, Z вместо (2.10) имеем:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

то компоненты $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ называют главными компонентами тензора деформаций (главными "удлинениями"), а направления X, Y, Z - главными направлениями (главными осями) тензора деформаций. Если до деформации элементарный объём dV упругой среды имеет форму шара, то в результате деформации он примет форму эллипсоида с осями по главным направлениям тензора деформаций (рис. 2.7,з).

2.6. Вектор вращения. Дилатация

Вектор вращения

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{U} = \mathbf{1}_x \omega_x + \mathbf{1}_y \omega_y + \mathbf{1}_z \omega_z. \quad (2.11)$$

Из определения (2.11) понятия "вектор вращения" и выражения (1.15) для ротора векторного поля в декартовых координатах следует, что, например,

скалярная компонента $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$, то есть эту компоненту вектора

вращения $\boldsymbol{\omega}$ определяют те же производные $\partial V/\partial x, \partial U/\partial y$, что и

компоненты $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ тензора чистой деформации.

Например, отличие выражений для компоненты ω_z и для деформации γ_{xy} - лишь в одном знаке ("-" вместо "+"). Но компонента ω_z характеризует иное, чем γ_{xy} , явление.

Рассмотрим случай, когда производная $\partial V/\partial x > 0$, а производная $\partial U/\partial y = -\partial V/\partial x < 0$. При этих условиях характеризующие деформации чистого сдвига компоненты тензора деформации $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$, а для компоненты ω_z вектора вращения $\boldsymbol{\omega}$ имеем: $\omega_z = \partial V/\partial x = -\partial U/\partial y > 0$. Этот случай иллюстрирует рис. 2.8. На рисунке видно, что при этих условиях лежащая в плоскости $z = \text{const}$ элементарная координатная площадка не испытывает чистой деформации сдвига. Она поворачивается на (бесконечно-малый) угол $\alpha \approx \text{tg} \alpha = \partial V/\partial x = -\partial U/\partial y = \omega_z$. При $\omega_z > 0$

направление этого поворота образует правовинтовую систему с направлением оси Z .

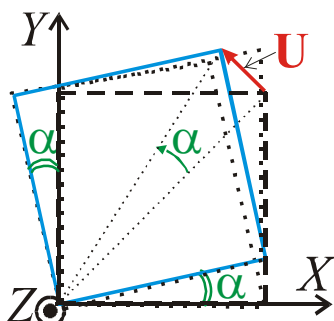


Рис. 2.8.

К определению z -компоненты ω_z вектора вращения ω

Следовательно, компоненты $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора вращения ω характеризуют (бесконечно-малые, в радианах) углы поворотов элементов dV среды вокруг осей X, Y, Z соответственно. Согласно (2.11) и выражению (1.15), в декартовых координатах для x -компоненты и y -компоненты вектора вращения справедливы выражения: $\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right),$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right).$$

Пусть до деформации элемент упругой среды имел объём dV , в результате деформации (сжатия-растяжения) объём dV изменился и стал равен dV' . Дилатация θ равна относительному изменению объёма dV :

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV}. \tag{2.12}$$

Далее будет удобно полагать, что dV и dV' - координатные элементы объёма в декартовых координатах (рис. 2.9). Тогда $dV = dx \cdot dy \cdot dz,$ $dV' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$ и из (2.12) получаем:

$$\theta = \frac{dx' \cdot dy' \cdot dz' - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dz'}{dz} - 1. \text{ Примем во внимание, что}$$

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dx' - dx + dx}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} + 1 = \varepsilon_x + 1, \text{ где,}$$

в соответствии в (2.10) и рис. 2.6, б-з, компонента ε_x - тензора деформации, характеризует деформацию растяжения-сжатия по оси X . Аналогичным образом,

$$\text{отношения } \frac{dy'}{dy} = \varepsilon_y + 1, \quad \frac{dz'}{dz} = \varepsilon_z + 1 \text{ и}$$

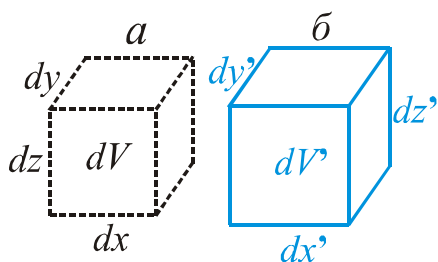


Рис. 2.9.

К определению дилатации θ

$$\text{дилатация } \theta = (\varepsilon_x + 1) \cdot (\varepsilon_y + 1) \cdot (\varepsilon_z + 1) - 1,$$

то есть

$\theta = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - 1.$ Так как в теории упругости деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - бесконечно-малые величины, то, пренебрегая бесконечно-малыми величинами более высокого порядка (произведениями $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y, \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z, \dots$), получаем: $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$ Принимая

во внимание то, что $\varepsilon_x = \partial U / \partial x$, $\varepsilon_y = \partial V / \partial y$, $\varepsilon_z = \partial W / \partial z$ и выражение (1.12) для дивергенции векторного поля, получаем:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad (2.12, a)$$

то есть дивергенция поля смещений \mathbf{U} равна относительным изменениям θ объёмов dV элементов упругой среды при деформациях. Такие изменения объёмов dV могут происходить при деформациях сжатия-растяжения.

Итак, согласно (2.11), (2.12), (2.12,a), производная $\operatorname{rot} \mathbf{U} = 2\boldsymbol{\omega}$ характеризует повороты элементов dV упругой среды, а производная $\operatorname{div} \mathbf{U} = \theta$ - изменения объёмов dV . Мы знаем, что в частных случаях векторное поле может быть 1) потенциальным или 2) соленоидальным (чисто-вихревым).

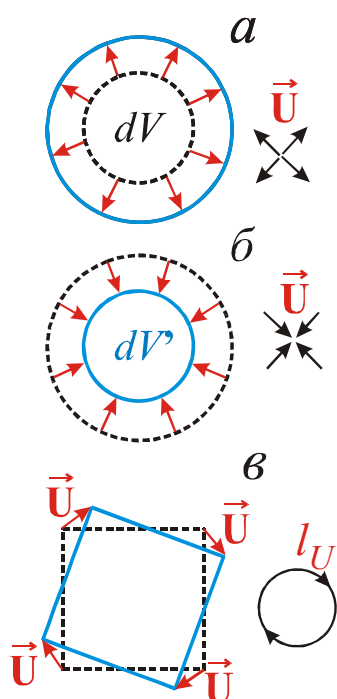


Рис. 2.10.

Особенности полей \mathbf{U} при деформациях растяжения (а), сжатия (б), при поворотах (в)

1). При потенциальном поле \mathbf{U} имеем: $\operatorname{rot} \mathbf{U} = 2\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, $\operatorname{div} \mathbf{U} = \theta \neq 0$. Потенциальную составляющую поля смещений \mathbf{U} обозначим \mathbf{U}_p . Такое поле можно выразить через скалярный потенциал, который в теории упругости принято обозначать Φ :

$$\mathbf{U}_p = \operatorname{grad} \Phi. \quad (2.12, б)$$

Следовательно, при потенциальном поле смещений \mathbf{U}_p элементы упругой среды могут испытывать деформации сжатия-растяжения, могут меняться их объёмы dV , но нет поворотов этих элементов (и деформаций сдвига). Простейшие (и, несколько, "утрированные") примеры, характеризующие особенности таких полей $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p$, приведены на рис. 2.10, а, б. В первом случае (растяжение dV) в окрестности dV имеем $\operatorname{div} \mathbf{U} = \theta > 0$, во втором (сжатие dV) - $\operatorname{div} \mathbf{U} = \theta < 0$.

2). При соленоидальном поле $\mathbf{U} = \mathbf{U}_s$ имеем: $\operatorname{rot} \mathbf{U} = 2\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $\operatorname{div} \mathbf{U} = \theta \equiv 0$.

Удовлетворяющее таким уравнениям соленоидальное (чисто-вихревое) поле

смещений обозначим \mathbf{U}_s . Знаем, что такое поле можно выразить через векторный потенциал, который в теории упругости обозначают $\boldsymbol{\Psi}$:

$$\mathbf{U}_s = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Psi}. \quad (2.12, в)$$

При таком поле смещений ($\mathbf{U} = \mathbf{U}_s$) элементы упругой среды могут испытывать повороты (и деформации сдвига), но нет деформаций сжатия-растяжения и изменения объёмов dV . Простейший пример того, что может

происходить с элементом упругой среды при таком поле смещений приведен на рис. 2.10,в. Здесь же показана векторная линия l_U , по касательной к которой направлены векторы U .

В общем случае поле смещений

$$U = U_P + U_S = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi. \quad (2.12, z)$$

2.6. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона

Закон Гука устанавливает (для идеально-упругой среды) прямую пропорциональную зависимость между упругими деформациями и вызвавшими их упругими напряжениями: *деформация*=const×*упр. напряжение*. Но, согласно (2.10), чистую деформацию характеризуют 6 компонент симметричного тензора деформаций. При симметричном тензоре упругих напряжений (2.8) его также определяют 6 компонент: 3 нормальных напряжения и 3 тангенциальных напряжения. Ограничимся случаем изотропной упругой среды, параметры которой одинаковы по всем направлениям. В такой среде нормальные упругие напряжения вызывают деформации сжатия-растяжения, а тангенциальные напряжения- деформации сдвига. При этом можем представить закон Гука в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_2 \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= c_2 \sigma_x + c_1 \sigma_y + c_2 \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= c_2 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_1 \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= c_3 \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = c_3 \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= c_3 \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где c_1, c_2, c_3 - константы, зависящие от свойств упругой среды. Эти три константы можем выразить через два упругих параметра среды: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

Рассмотрим случай, когда нормальное напряжение по направлению оси X декартовых координат $\sigma_x > 0$, а все остальные компоненты тензора напряжений в декартовых координатах равны нулю. В этом случае координатный элемент упругой среды (либо упругое тело в форме прямоугольного параллелепипеда с рёбрами, параллельными осям декартовых координат) испытывает (продольное) растяжение по направлению оси X и (поперечные) сжатия по направлениям осей Y, Z (рис. 2.11). При этом компоненты тензора чистой деформации $\varepsilon_x > 0$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z < 0$ и, как следует из (2.13), $\varepsilon_x = c_1 \sigma_x$, $\varepsilon_y = c_2 \sigma_x$, $\varepsilon_z = c_2 \sigma_x$.

Обозначая $c_1 = 1/E$, получаем: $\varepsilon_x = \sigma_x / E$, где E - модуль Юнга. Каков физический смысл модуля Юнга E ? из равенства $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ следует, что $E = \sigma_x / \varepsilon_x$. Но деформация ε_x равна относительному

удлинению при $\varepsilon_x > 0$ (или сжатию при $\varepsilon_x < 0$) по направлению оси X . В соответствии с обозначениями на рис. 2.11, $\varepsilon_x = \Delta l / l$ и

$$E = \sigma_x \frac{l}{\Delta l}. \quad (2.14)$$

При $\Delta l = l$ имеем: $E = \sigma_x$, то есть модуль Юнга E равен такому нормальному напряжению (при одноосном растяжении), при котором длина l показанного на рис. 2.11 прямоугольного параллелепипеда увеличится в два раза, то есть $\Delta l = l$ (правда немного найдётся материалов, которые бы такое выдержали). Из (2.14) следует, что чем меньше относительное растяжение упругой среды при заданном положительном нормальном напряжении, тем больше у такой среды модуль Юнга.

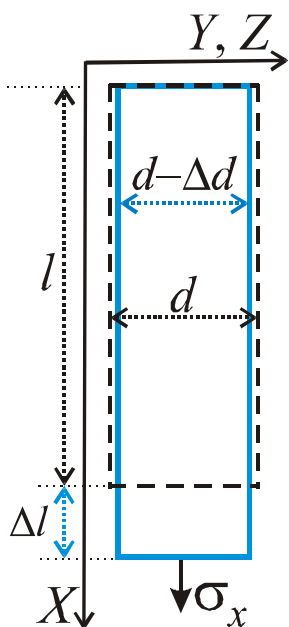


Рис. 2.11.

К закону Гука

Так как при вызывающем продольное растяжение по направлению оси X нормальном напряжении $\sigma_x > 0$, имеем ортогональные направлению оси X поперечные сжатия $\varepsilon_y = \varepsilon_z < 0$,

обозначим в законе Гука (2.13) $c_2 = \frac{-\nu}{E}$, где ν -

коэффициент Пуассона ($\nu > 0$). Выясним то, что характеризует коэффициент Пуассона в случае одноосного растяжения. Из равенств $\varepsilon_y = c_2 \sigma_x$,

$c_2 = \frac{-\nu}{E}$ следует, что $\nu = -E \frac{\varepsilon_y}{\sigma_x}$. Но деформация $\varepsilon_y = \varepsilon_z$ в этом случае

(при $\sigma_x > 0$) характеризует относительное поперечное сжатие ($-\Delta d / d$) по оси Y или Z (рис. 2.11). Принимая во внимание выражение (2.14) для E ,

получаем: $\nu = -\sigma_x \frac{l}{\Delta l} \left(\frac{-\Delta d / d}{\sigma_x} \right)$ или

$$\nu = \frac{\Delta d / d}{\Delta l / l}. \quad (2.15)$$

То есть коэффициент Пуассона ν можно определить, как "отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному удлинению при одноосном растяжении". Ясно, что ν - безразмерная величина. У большинства твёрдых веществ, в частности у горных пород, коэффициент Пуассона может иметь значение приблизительно от 0.1 до 0.35. Отметим, что слабо сцементированные горные породы с низкими "прочностными свойствами" имеют повышенные значения коэффициента Пуассона, поэтому его определение является одной из важных задач методов сейсморазведки при инженерных изысканиях под строительство.

Коэффициенты в законе Гука (2.13) обозначили: $c_1 = 1/E$, $c_2 = -\nu/E$. Тогда первые три равенства в (2.13) для деформаций растяжения- сжатия принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Получим выражение для дилатации θ . Согласно (2.12,a), (2.16), $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) + \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$.

Отсюда следует, что

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.17)$$

В частности, как уже было отмечено в разделе 2.2, при (характерном для жидкости) всестороннем сжатии имеем: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$ (где P - давление). В этом случае из (2.17) получаем: $\theta = -\frac{1-2\nu}{E} 3P$. Для

"абсолютно-упругой, несжимаемой жидкости" при конечном давлении P и дилатации $\theta=0$ из последнего выражения для θ следует, что этому случаю соответствует значение коэффициент Пуассона $\nu=0.5$. Тогда для такой жидкости при конечном значении P коэффициент Пуассона $\nu=0.5$.

Множители c_3 в равенствах (2.13) для деформаций сдвига в законе Гука тоже можно выразить через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

Пусть три равенства (2.16) - это закон Гука для главных направлений X, Y, Z тензора упругих напряжений и тензора чистой деформации. То есть при таких направлениях X, Y, Z все тангенциальные напряжения τ и деформации γ равны нулю.

В соответствии с правилами преобразования компонент тензора (1.26) при повороте осей декартовых координат, например, для тангенциальной компоненты $\tau_{x'y'}$, тензора упругих напряжений и компоненты $\gamma_{x'y'}$, тензора чистой деформации сдвига для справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= [\sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Y', X) + \\ &+ [\tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z) \cos(Z', Y)] \cos(Y', Y) + \\ &+ [\tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z)] \cos(Y', Z). \\ \gamma_{x'y'} &= [\varepsilon_x \cos(X', X) + \gamma_{yx} \cos(X', Y) + \gamma_{zx} \cos(X', Z)] \cos(Y', X) + \\ &+ [\gamma_{xy} \cos(X', X) + \varepsilon_y \cos(X', Y) + \gamma_{zy} \cos(X', Z) \cos(Z', Y)] \cos(Y', Y) + \\ &+ [\gamma_{xz} \cos(X', X) + \gamma_{yz} \cos(X', Y) + \varepsilon_z \cos(X', Z)] \cos(Y', Z). \end{aligned}$$

При $\tau_{xy}=0, \tau_{yx}=0, \tau_{xz}=0, \tau_{zx}=0, \tau_{yz}=0, \tau_{zy}=0; \gamma_{xy}=0, \gamma_{yx}=0, \gamma_{xz}=0, \gamma_{zx}=0, \gamma_{yz}=0, \gamma_{zy}=0$ из этих равенств получаем:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x \cos(X', X)\cos(Y', X) + \sigma_y \cos(X', Y)\cos(Y', Y) + \sigma_z \cos(X', Z)\cos(Y', Z). \quad (2.18)$$

$$\gamma_{x'y'} = \varepsilon_x \cos(X', X)\cos(Y', X) + \varepsilon_y \cos(X', Y)\cos(Y', Y) + \varepsilon_z \cos(X', Z)\cos(Y', Z). \quad (2.19)$$

Пусть при неизменном положении оси Z (то есть при одинаковом положении осей Z и Z' в "старой" и "новой" системах декартовых координат) оси X и Y имеют направления X' и Y' в "новой" системе координат.

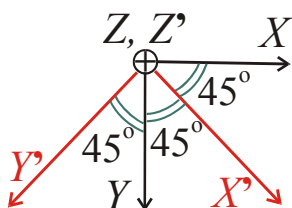


Рис. 2.12.

К определению выражений для деформаций сдвига в законе Гука

Угол поворота равен 45° , а направление поворота осей X, Y образует правовинтовую систему с направлением оси Z (рис. 2.12). Учтём, что $\cos(45^\circ)=\sqrt{2}/2, \cos(135^\circ)=-\sqrt{2}/2, \cos(90^\circ)=0$.

Поэтому в рассматриваемом случае имеем следующие углы между направлениями "новых и старых" осей: $(X', Y)=(X', X)=(Y', Y)=45^\circ; (Y', X)=135^\circ; (X', Z)=(Y', Z)=90^\circ$. Принимая во внимание, что $\cos(45^\circ)=\sqrt{2}/2, \cos(135^\circ)=-\sqrt{2}/2, \cos(90^\circ)=0$, из

(2.19), (2.18) получаем:

$$\gamma_{x'y'} = \varepsilon_x \cdot \sqrt{2}/2 \cdot (-\sqrt{2}/2) + \varepsilon_y \cdot \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)/2.$$

Тогда, в соответствии с (2.16),

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_y - \sigma_x). \quad (2.20)$$

При тех же углах между осями из (2.18) следует, что

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)/2, \text{ то есть разность } (\sigma_y - \sigma_x) = 2 \cdot \tau_{x'y'}.$$

Подставляя последнее выражение для разности $(\sigma_y - \sigma_x)$ в (2.20) получаем выражение для константы c_3 в (2.13) через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν : $c_3 = \frac{1+\nu}{E}$, то есть

$$\gamma_{x'y'} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{x'y'}. \quad (2.21)$$

Конечно такого вида выражения для компонент тензора чистой деформации сдвига справедливы не только в декартовых координатах с осями X', Y', Z' , но также и в декартовых координатах с осями X, Y, Z .

Поэтому, согласно (2.21), $\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}$. В соответствии с этими равенствами, а также выражениями (2.16) получаем

закон Гука (для абсолютно-упругой изотропной среды) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}, & \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21a)$$

2.7. Выражение упругих напряжений через деформации. Упругие постоянные Ламэ

В законе Гука (2.21a) упругие деформации выражены через упругие напряжения и параметры упругой среды (E , ν). Но иногда, наоборот, бывает нужно выразить упругие напряжения через деформации. Получим такие выражения. Из 1-го равенства в (2.21a) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z + \sigma_x - \sigma_x)] = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сумма нормальных упругих напряжений $(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1+\nu}{\nu} \sigma_x - \frac{E}{\nu} \varepsilon_x$. Но, согласно (2.17), та же сумма

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= \frac{E \cdot \theta}{1-2\nu}. \quad \text{Следовательно,} & \varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \frac{E \cdot \theta}{(1-2\nu)} = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu \cdot \theta}{(1-2\nu)}, & \frac{1+\nu}{E} \sigma_x &= \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \theta, \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x.$$

В левой части последнего равенства нормальное напряжение σ_x , а в правой- характеризующие деформацию среды величины θ и ε_x , а также- параметры упругой среды: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Введя обозначения

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}, \quad (2.22)$$

получаем для нормального напряжения σ_x следующее выражение: $\sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x$. Аналогичные равенства, конечно, справедливы и для других нормальных напряжений, то есть

$$\sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z. \quad (2.23)$$

Выражения для тангенциальных напряжений τ_{yz}, \dots легко получить из трёх последних равенств в (2.21a). Принимая во внимание обозначение (2.22) для μ , имеем:

$$\tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = 2\mu\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy}. \quad (2.24)$$

Определяемые выражениями (2.22) параметры λ, μ упругой среды называют *упругими постоянными Ламэ*. Параметр μ называют также *модулем сдвига*. Согласно (2.22), упругие постоянные Ламэ зависят только от модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

3.1. Уравнение передачи упругих колебаний (уравнение Ламэ)

Применим 2-й закон Ньютона к однородному по плотности ρ , параметрам E, ν и, соответственно, по упругим постоянным λ, μ Ламэ абсолютно упругой среды координатному элементу объёма $dV=dx \cdot dy \cdot dz$ с массой $dm=\rho \cdot dV$ (рис.3.1). Для массы dm ускорение $\mathbf{a} = \sum \mathbf{dF} / dm$. В разделе 2.2 уже было сказано о том, что $\sum \mathbf{dF} = \sum \mathbf{dF}^{\text{объ}} + \sum \mathbf{dF}^{\text{пов}}$ - сумма объёмных и поверхностных сил, где $\mathbf{dF}^{\text{объ}}$ - это одна из сил, действующих на всю массу dm (например, сила тяготения). $\sum \mathbf{dF}^{\text{объ}}$ пропорциональна dm . Поэтому принято обозначение $\sum \mathbf{dF}^{\text{объ}} = \mathbf{F} \cdot dm = \mathbf{F} \cdot \rho \cdot dV$. Здесь $\sum \mathbf{dF}^{\text{объ}} / dm = \mathbf{F}$ - сумма объёмных сил ("массовых сил"), отнесённая к единице массы; абсолютная величина $|\mathbf{F}| = F$ - конечная величина.

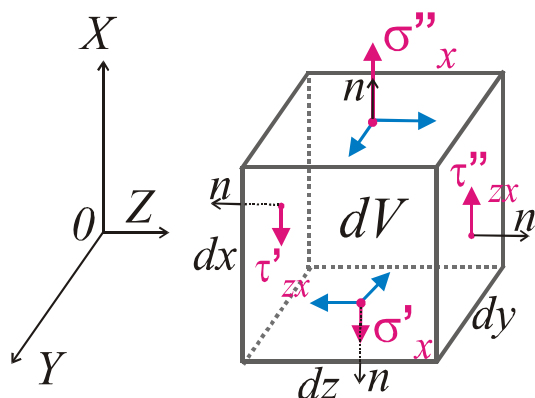


Рис. 3.1.

К выводу уравнения Ламэ

$\sum \mathbf{dF}^{\text{пов}}$ - сумма сил, действующих на поверхности $S[dV]$, ограничивающей объём dV с массой dm . Для показанного на рис. 3.1 координатного элемента объёма dV $\sum \mathbf{dF}^{\text{пов}}$ - это сумма произведений векторов упругих напряжений \mathbf{P} на 6-и элементарных координатных площадках на их площади: $\mathbf{P}'_x dS_x, \mathbf{P}''_x dS_x, \mathbf{P}'_y dS_y, \mathbf{P}''_y dS_y, \mathbf{P}'_z dS_z, \mathbf{P}''_z dS_z$.

Здесь, например, \mathbf{P}''_x это вектор напряжения на площадке dS_x , x -координата которой больше на dx x -координаты противоположной площадки dS_x , на которой вектор напряжения обозначим \mathbf{P}'_x . На первой из этих площадок dS_x направление наружной, по отношению к dV ,

нормали n параллельно оси X , а на второй - антипараллельно этой оси. Такие же обозначения применены для векторов напряжения $\mathbf{P}'_y dS_y$, $\mathbf{P}''_y dS_y$, $\mathbf{P}'_z dS_z$, $\mathbf{P}''_z dS_z$ на координатных площадках dS_y , dS_z , а также - для нормальных ($\sigma''_x, \sigma'_x, \sigma''_y, \sigma'_y, \sigma''_z, \sigma'_z$) и тангенциальных ($\tau''_{zx}, \tau'_{zx}, \dots$) компонент векторов упругих напряжений (рис. 3.1).

Тогда, подобно (2.3), 2-й закон Ньютона для массы $dm=\rho \cdot dV$ в координатном элементе объёма dV можем записать в виде:

$$\mathbf{P}''_x dS_x + \mathbf{P}'_x dS_x + \mathbf{P}''_y dS_y + \mathbf{P}'_y dS_y + \mathbf{P}''_z dS_z + \mathbf{P}'_z dS_z + \mathbf{F} \cdot \rho \cdot dV = \mathbf{a} \cdot \rho \cdot dV. \quad (3.1)$$

Это равенство векторов справедливо и для компонент этих векторов по любому направлению, например - направлению оси X . В соответствии с принятыми в теории упругости правилами (2.1) определения декартовых скалярных компонент упругих напряжений, например, для x - компонент векторов во 2-м законе Ньютона для однородного координатного элемента dV абсолютно упругой среды из (3.1) получаем:

$$(\sigma''_x - \sigma'_x) dS_x + (\tau''_{yx} - \tau'_{yx}) dS_y + (\tau''_{zx} - \tau'_{zx}) dS_z + F_x \cdot \rho \cdot dV = a_x \cdot \rho \cdot dV. \quad (3.2)$$

Так как расстояния dx, dy, dz между противоположными гранями элемента dV - бесконечно-малы, разности компонент упругих напряжений на этих гранях можем представить в виде: $(\sigma''_x - \sigma'_x) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$,

$(\tau''_{yx} - \tau'_{yx}) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$, $(\tau''_{zx} - \tau'_{zx}) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$ и из (3.2) следует, что

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dS_x + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \cdot dS_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \cdot dS_z + F_x \cdot \rho \cdot dV = a_x \cdot \rho \cdot dV. \quad (3.3)$$

Учтём, что $dS_x=dy \cdot dz$, $dS_y=dx \cdot dz$, $dS_z=dx \cdot dy$, $dV=dx \cdot dy \cdot dz$. Если мы подставим эти выражений в уравнение (3.3), то каждый член этого уравнения будет содержать множитель $dV=dx \cdot dy \cdot dz$. Сокращая левые и правые части (3.3) на общий множитель dV получаем уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x \cdot \rho = a_x \cdot \rho. \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) надо будет выразить упругие напряжения через компоненты вектора смещения \mathbf{U} . Учтём сначала полученные в разделе 2.7 выражения (2.23), (2.24), которые позволяют выразить упругие напряжения через упругие деформации. Из этих выражений, в частности, следует, что напряжения $\sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \epsilon_x$, $\tau_{yx} = 2\mu \gamma_{yx}$, $\tau_{zx} = 2\mu \gamma_{zx}$. Следовательно, для суммы первых трёх слагаемых в левой части уравнения (3.4) при однородности упругой среды по параметрам λ, μ получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Согласно (2.10a), $\varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial x}$, $\gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$, $\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$.

Поэтому правая часть уравнения (3.5) $\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} =$

$$= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) =$$

$$= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) =$$

$$= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) =$$

$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 U$. Было принято во внимание, что, согласно (2.12a),

(1.18), (1.20), $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \theta$, а $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$. Учтём

ещё, что в (3.4) x -компоненту a_x ускорения \mathbf{a} определяет выражение:

$a_x = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$. Тогда из (3.4) - (3.5) для x -компоненты U вектора смещения \mathbf{U}

получаем уравнение:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 U + \rho \cdot F_x = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Аналогичным уравнениям, конечно, удовлетворяют y -компонента V и z -компонента W вектора смещения \mathbf{U} :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 V + \rho \cdot F_y = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (3.6, a)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 W + \rho \cdot F_z = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (3.6, б)$$

Умножим все члены уравнений (3.6), (3.6,a), (3.6,б) соответственно на орты $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ и сложим соответствующие члены этих уравнений.

Принимая во внимание, что $\mathbf{1}_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \text{grad} \theta$,

$$\mathbf{1}_x U + \mathbf{1}_y V + \mathbf{1}_z W = \mathbf{U},$$

$$\mathbf{1}_x \nabla^2 U + \mathbf{1}_y \nabla^2 V + \mathbf{1}_z \nabla^2 W = \nabla^2 \mathbf{U},$$

$$\mathbf{1}_x F_x + \mathbf{1}_y F_y + \mathbf{1}_z F_z = \mathbf{F}, \text{ получаем уравнение:}$$

$$(\lambda + \mu)\text{grad}\theta + \mu\nabla^2\mathbf{U} + \rho \cdot \mathbf{F} = \rho \cdot \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

где, согласно (2.12,a), дилатация $\theta = \text{div } \mathbf{U}$.

Уравнение (3.7) - это *уравнение Ламэ* или *уравнение передачи колебаний* в абсолютно-упругой среде. Полю массовой силы \mathbf{F} в этом уравнении в теории распространения упругих колебаний можно придать смысл тех (нормированных на $dm = \rho \cdot dV$) сил, которые заставляют некоторые элементы dV упругой среды (или области V такой среды) совершать вынужденные смещения (колебания). В тех областях пространства, где $\mathbf{F} = 0$, получаем уравнение Ламэ для свободных колебаний:

$$(\lambda + \mu)\text{grad } \theta + \mu\nabla^2\mathbf{U} = \rho \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Воспользуемся тождественным равенством (1.24), из которого следует, что $\nabla^2\mathbf{U} \equiv \text{grad div } \mathbf{U} - \text{rot rot } \mathbf{U}$ и представим уравнение (3.8) в виде: $(\lambda + \mu)\text{grad } \theta + \mu\text{grad div } \mathbf{U} - \mu\text{rot rot } \mathbf{U} = \rho \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}$. Так как, согласно (2.12,a), (2.11), $\text{div } \mathbf{U} = \theta$, а $\text{rot } \mathbf{U} = 2\boldsymbol{\omega}$, то из (3.8) получаем:

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad } \theta - 2\mu\text{rot } \boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

3.2. Волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн

Покажем, что в среде, однородной по параметрам ρ , λ , μ (заметим, что и уравнения (3.7)- (3.9) тоже получены при этих условиях), следствиями (3.9) являются два уравнения, описывающие независимое распространение 2-х типов упругих волн (2-х видов поля смещений \mathbf{U}). Распространений первой из них (поля \mathbf{U}_P) сопровождается деформациями сжатия-растяжения и изменениями объёмов dV элементов упругой среды, которые характеризует дилатация $\theta = \text{div } \mathbf{U}_P$ (см. раздел 2.6). Распространение второй упругой волны (поля \mathbf{U}_S) сопровождается поворотами элементарных объёмов dV упругой среды (которые, согласно (2.11), определяют компоненты вектора вращения $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot } \mathbf{U}_S$), а также - чистыми деформациями сдвига γ_{yz}, \dots (рис 2.7, 2.8).

Из равенства (3.9) векторных полей следует равенство дивергенций этих полей. Следовательно, из (3.9) при однородной по параметрам λ , μ , ρ среде ($\nabla\lambda = 0$, $\nabla\mu = 0$, $\nabla\rho = 0$) получаем:

$(\lambda + 2\mu)\text{div grad } \theta - 2\mu \text{div rot } \boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \text{div } \mathbf{U}}{\partial t^2}$. Принимая во внимание, что $\text{div grad } \theta = \nabla^2 \theta$, $\text{div rot } \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, а $\text{div } \mathbf{U} = \theta$, получаем:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \text{ или}$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \text{ где } v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}. \quad (3.10)$$

Итак, для дилатации $\theta = \text{div } \mathbf{U}_p$ получили волновое уравнение. Такому же уравнению в однородной по ρ , λ , μ среде удовлетворяет связанная с θ и деформациями сжатия-растяжения потенциальная часть \mathbf{U}_p поля смещений

$$\nabla^2 \mathbf{U}_p = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_p}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

и скалярный потенциал Φ поля смещений

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (3.12)$$

связанный с \mathbf{U}_p равенством (2.12,б): $\mathbf{U}_p = \text{grad } \Phi$.

Уравнения (3.10), (3.11), (3.12) для θ , \mathbf{U}_p и Φ математически идентичны. Они содержат вторые пространственные производные ∇^2 (см. (1.18), (1.20)) и вторые производные по времени t . Уравнения такого вида называют однородными *волновыми уравнениями*. В общем курсе "Теория поля" мы получали уравнения такого вида для векторов напряжённостей электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} переменного электромагнитного поля в однородном изоляторе. Было показано, что входящая в эти уравнения величина v (в уравнениях (3.10) - (3.12) - v_p) имеет смысл скорости распространения поля ("сигналов"). Следовательно, уравнения (3.10), (3.11), (3.12) для θ , \mathbf{U}_p и Φ описывают распространение составляющей \mathbf{U}_p поля смещений (сопровождающееся изменениями объёмов dV упругой среды и деформациями сжатия-растяжения) со скоростью v_p , зависящей от параметров ρ , λ , μ упругой среды.

Вернёмся к уравнению (3.9) и приравняем роторы его левой и правой частей:

$$(\lambda + 2\mu) \text{rot grad } \theta - 2\mu \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \text{rot } \mathbf{U}}{\partial t^2}. \quad \text{Так как}$$

$$\text{rot grad } \theta \equiv 0, \quad \text{rot rot } \boldsymbol{\omega} \equiv \text{grad div } \boldsymbol{\omega} - \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad \text{rot } \mathbf{U} = 2\boldsymbol{\omega},$$

$\text{div } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{div rot } \mathbf{U} \equiv 0$ получаем волновое уравнение для вектора вращения

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2}, \text{ где } v_S = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (3.13)$$

Такому же уравнению в однородной по ρ , λ , μ среде удовлетворяет связанная с вектором $\boldsymbol{\omega}$ (и деформациями сдвига) вихревая часть \mathbf{U}_S поля смещений \mathbf{U} :

$$\nabla^2 \mathbf{U}_S = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_S}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

и векторный потенциал $\boldsymbol{\Psi}$ поля смещений \mathbf{U}_S

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2}, \quad (3.15)$$

связанный с \mathbf{U}_S равенством (2.12,б): $\mathbf{U}_S = \text{rot } \boldsymbol{\Psi}$. Из сказанного выше ясно, что величина v_S в уравнениях (3.13), (3.14), (3.15)- это скорость распространения в абсолютно-упругой среде полей $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{U}_S и $\boldsymbol{\Psi}$.

Итак, из (3.10)- (3-15) следует, что в однородной упругой среде распространяются независимо друг от друга (и с разными скоростями) два типа упругих колебаний и связанные с ними составляющие поля смещений \mathbf{U} . Потенциальная часть \mathbf{U}_P поля смещений, деформации сжатия-растяжения и связанные с ними изменения элементарных объёмов dV упругой среды распространяются со скоростью v_P . Вихревая часть \mathbf{U}_S поля смещений, связанные с ней повороты элементов dV , а также деформации сдвига, распространяются со скоростью v_S .

Выясним то, от чего в абсолютно-упругой среде зависит отношение v_P/v_S скоростей v_P и v_S . Согласно (3.10), (3.13), (2.22) отношение

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\nu}{(1-2\nu)} + 2} = \sqrt{2 \frac{\nu + 1 - 2\nu}{1-2\nu}}, \text{ то есть}$$

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}} = \sqrt{2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}}. \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что отношение $v_P/v_S > \sqrt{2}$ и зависит только от коэффициента Пуассона ν . Следовательно, при известных скоростях v_P , v_S можно определить коэффициент Пуассона упругой среды. Чем больше коэффициент Пуассона, тем больше отношение v_P/v_S . Ясно, что скорость v_P всегда больше, чем v_S . Отсюда- происхождение индексов у этих скоростей и соответствующих составляющих поля смещений: "P"- prima (первая), "S"- secunda (вторая).

Упругие волны, распространяющиеся со скоростями v_P и v_S называют соответственно продольными и поперечными. Это связано с тем, что у первой из них (P-волны) смещения \mathbf{U}_P точек среды происходят

в направлениях коллинеарных (продольных) направлению распространения волны. У S -волны векторы смещения \mathbf{U}_S ортогональны (поперечны) направлению её распространения.

Отметим ещё, что ранее, в разделе 2.6, на основе равенства (2.17), мы выяснили, что "абсолютно-упругой несжимаемой жидкости" формально соответствует значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.5$. При таком значении ν из (3.16) получаем: $v_P/v_S \rightarrow \infty$. Это обусловлено тем, что в жидкости (с конечной скоростью v_P) могут распространяться только продольные упругие волны, но не поперечные упругие волны. Поэтому в жидкостях скорость $v_S = 0$.

"Задание". Получить выражения для определения коэффициента Пуассона ν по значениям скоростей v_P и v_S . **Пример**: $v_P = 2$ км/с, $v_S = 1$ км/с. Определить коэффициент Пуассона ν при этих значениях v_P, v_S .

"Решение". (Ответ). Из (3.16) следует, что $\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 = \frac{2-2\nu}{1-2\nu}$. Отсюда для

коэффициента Пуассона ν получаем следующее выражение:
$$\nu = \frac{\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 2}{2\left[\left(\frac{v_P}{v_S}\right)^2 - 1\right]}$$
. То есть

при известных значениях скоростей v_P и v_S мы можем определить коэффициент Пуассона ν . При указанных выше численных значениях v_P и v_S получаем: $\nu = 1/3 \approx 0.333$.

Рассмотрим теперь простейшие примеры решения волновых уравнений (3.10) - (3.15) для характеристик упругих волн.

3.3. Уравнение струны его решения

Уравнения вида (3.10) - (3.15) справедливы соответственно для полей $\theta, \mathbf{U}_p, \Phi, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{U}_s, \boldsymbol{\Psi}$. В этих уравнениях - вторые пространственные производные ($\nabla^2 \dots$) и вторые производные по времени ($\partial^2 \dots / \partial t^2$). Уравнения такого вида называют (однородными) *волновыми уравнениями*. То есть в однородной абсолютно-упругой среде поля $\theta, \mathbf{U}_p, \Phi, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{U}_s, \boldsymbol{\Psi}$ удовлетворяют таким уравнениям.

Для выяснения главных особенностей полей, удовлетворяющих волновым уравнениям, рассмотрим сначала решения этих уравнений в наиболее простых случаях. Обозначим любую скалярную декартову компоненту полей $\mathbf{U}_p, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{U}_s, \boldsymbol{\Psi}$, либо поля θ, Φ буквой η . Согласно (3.10)

- (3.15) величина η удовлетворяет волновому уравнению
$$\nabla^2 \eta = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

или (в декартовых координатах)
$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$
, где $v = v_P$ или

$v = v_S$. Пусть особенности поля таковы, что любая компонента η (помимо

времени t) зависит лишь от одной декартовой координаты z . Тогда $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$ и компонента η удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

"Одномерное" волновое уравнение вида (3.17) называют *уравнением струны*. Согласно (3.17), вторая производная $\partial^2 \eta / \partial t^2$ отличается от второй производной $\partial^2 \eta / \partial z^2$ постоянным множителем $1/v^2$. Очевидно, что общее решение уравнения (3.17) можно представить в виде:

$$\eta = F(t - z/v) + G(t + z/v), \quad (3.18)$$

где F и G - две любые (дважды дифференцируемые) функции, а, соответственно, $(t-z/v)$ и $(t+z/v)$ - аргументы этих функций. То есть, если, например, выражение для функции F содержит z или t , то не иначе, как в виде разности $t-z/v$.

Пусть $G=0$. Представим выражение (3.18) для η в следующем виде:

$$\eta = F(\tau), \quad \text{где } \tau = t - z/v. \quad (3.19)$$

При заданной константе v компонента η зависит от двух аргументов z и t . Можем придавать времени t фиксированные значения и рассматривать зависимости η от пространственной координаты z . Допустим, что в момент времени $t=t_1$ величина η зависит от z так, как это показано на рис. 3.2 (штриховая линия). В частности, при $t=t_1$ каждому значению функции $\eta=F(t-z/v)$ соответствует некоторый аргумент z_1 . На рис. 3.2 для примера показана координата z_1 максимума η_0 на зависимости η от z при $t=t_1$.

Как изменится зависимость η от z в (более поздний) момент времени $t_2=t_1+\Delta t$? Такая зависимость показана на рис. 3.2 сплошной линией.

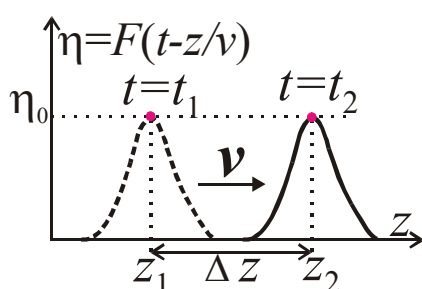


Рис. 3.2.

Распространение по направлению оси Z

Следует учесть, что, согласно решению (3.19) уравнения струны (3.17), при заданной функции F значение величины η полностью определяет аргумент $\tau=t-z/v$. Тогда при $\tau=t_1-z_1/v$ и $\tau=t_2-z_2/v=t_1+\Delta t-(z_1+\Delta z)/v$, величина η будет одинакова, если $\Delta t=\Delta z/v$, то есть при $\frac{\Delta z}{\Delta t} = v$.

На рис. 3.2 видно, что выражение (3.19) описывает распространение со временем некоторого колебания (сигнала) вдоль оси Z (в направлении увеличения координаты z) со скоростью v . Заметим, что функция G в (3.18) описывает распространение η со временем со скоростью v в направлении уменьшения координаты z . То есть общему решению (3.18) уравнения струны (3.17) соответствуют две плоские волны, распространяющиеся со скоростью v в

противоположных направлениях. У каждой из них в фиксированный момент времени t значения величины η одинаковы в каждой плоскости $z=\text{const}$.

Итак, v это скорость распространения упругих волн (колебаний) в абсолютно-упругой среде. Согласно (3.10), (3.13), скорости v_P , v_S , определяют выражения: $v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$.

Вернёмся к одному из решений (3.19) уравнения струны (3.17). Напомню, что это решение отвечает распространению плоской волны по направлению оси Z . Пусть величина $\eta = F(\tau)$ зависит от τ так, как это показано на рис. 3.3,а. То есть при $\tau < 0$ $F(\tau) = 0$, а при $\tau > 0$ зависимость $F(\tau)$ подобна убывающей по амплитуде с ростом τ синусоиде: $F(\tau) = c \cdot \exp(-b\tau) \cdot \sin(a\tau)$, где a , b , c - положительные константы. Примем во внимание, что в (3.19) $\tau = t - z/v$, следовательно $t = \tau + z/v$, $z = v(t - \tau)$. Чем будут отличаться зависимости $\eta = F(t)$ при $z=\text{const}$ и

$\eta = F(z)$ при $t=\text{const}$ от графика на рис. 3.3,а?

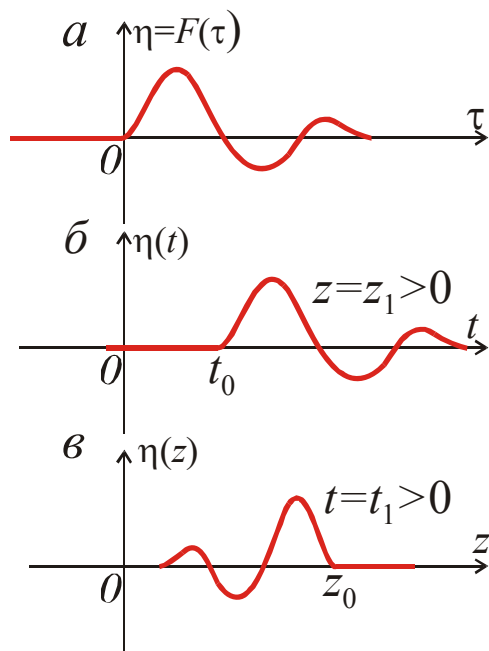


Рис. 3.3.

Пример зависимости $F(\tau)$ (а);
временная (б) и
пространственная (в) волны

На рис. 3.3,б показан график колебаний ("временная волна")-зависимость $\eta(t)$ в фиксированной точке пространства, точнее- в плоскости $z=\text{const}$ с координатой $z=z_1 > 0$. Так как $t = \tau + z/v$, то при $z=z_1 > 0$ $t > \tau$ на величину z_1/v . На зависимости $\eta(t)$ при $z > 0$ имеем ту же последовательность значений, что и на графике $\eta(\tau)$, но смещённую "вправо" относительно начала 0 отсчёта аргумента t . При большем, чем z_1 , значении $z=z_2=\text{const}$ график на рис. 3.3,б без изменения формы сместится вправо - в сторону больших значений аргумента t .

На рис. 3.3,в показан "профиль волны" (пространственная волна) - зависимость $\eta(z)$ в фиксированный

момент времени $t=t_1 > 0$. Так как $z = v(t - \tau)$, то с ростом τ координата z уменьшается. Поэтому (для волны, распространяющейся в направлении оси Z) зависимость $\eta(z)$ отличается от зависимости $\eta(\tau)$ не только тем, что аргументы z и τ имеют разную размерность и горизонтальный масштаб (см. рис. 3.3,а,в). Зависимость $\eta(z)$ - "зеркальное отражение" зависимости $\eta(\tau)$. Плоскость с координатой, обозначенной z_0 на рис. 3.3,в, отвечает "фронту" плоской волны в момент времени t_1 . Ясно, что

при большем, чем t_1 , времени $t_2 = \text{const}$ график на рис. 3.3,в без изменения формы сместится вправо, в сторону больших значений координаты z .

Вопросы.

1). На какое расстояние Δz по оси Z переместится упругое колебание (упругая волна) на рис. 3.3,в за время $\Delta t = t_2 - t_1$?

2). Как изменятся графики на рис. 3.3,б, в, если зависимость на рис. 3.3,а- это (в отличие от (3.19)) функция $\eta = G(\tau)$, где $\tau = t + z/v$, описывающая плоскую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном направлению оси Z (в направлении уменьшения координаты z)?

3.4. Плоская продольная упругая волна

Пусть в декартовых координатах поле смещений $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x U(x, t)$, то есть ненулевой является только x - компонента U вектора \mathbf{U} , которая (кроме времени t) зависит от одной декартовой координаты x . Каковы в этом случае будут пространственные производные поля \mathbf{U} , связанные с вектором вращения $\boldsymbol{\omega}$ и дилатацией θ ? Согласно (1.15), (2.12,в), при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x U(x, t)$

$$2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{U} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0.$$

Согласно (1.12), (2.12,а), при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x U(x, t)$ дилатация

$$\theta = \text{div } \mathbf{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_x.$$

Итак, для такого переменного поля смещений \mathbf{U} , в соответствии с изложенным выше имеем: $\mathbf{U}_S = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_P$ и рассматриваемое здесь поле \mathbf{U} в однородной среде

удовлетворяет волновому уравнению (3.11): $\nabla^2 \mathbf{U}_P = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_P}{\partial t^2}$. При

$\mathbf{U} = \mathbf{1}_x U(x, t)$ из этого уравнения получаем для компоненты U поля смещений известное нам уравнение струны, аналогичное (3.17):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{3.20}$$

Одно из 2-х решений этого уравнения, подобно (3.19), можем представить в виде:

$$U = F(\tau), \text{ где } \tau = t - x/v_P. \tag{3.21}$$

В этом случае поле $\mathbf{U} = \mathbf{U}_P = \mathbf{1}_x U(x, t)$ - это плоская продольная упругая волна, распространяющаяся в направлении оси X .

Пусть функция $U = F(\tau)$ (как и на рис. 3.3,а) имеет вид, показанный на рис. 3.4. Перейдём от функции $U = F(\tau)$ к зависимости $U(t)$ при $x = \text{const}$ - временная волна (график колебаний) и зависимости $U(x)$ при $t = \text{const}$ - пространственная волна ("профиль" волны).

Зависимости $U_x=U = F(\tau)$ или $U_y=V = F(\tau)$ на рис. 3.4 аналогичны

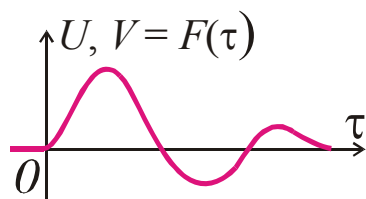


Рис. 3.4.

Пример зависимости компоненты U (или компоненты V) вектора смещения \mathbf{U} от τ

зависимости $\eta(\tau)$ на рис. 3.3,*a*. В некоторой точке пространства (лежащей в плоскости $x=x_0=\text{const}$) в момент времени $t=t_0$ начинаются упругие колебания. Тогда t_0 - момент "первого вступления" (этих колебаний). Согласно (3.21) и рис. 3.4, 3.5,*a*, время t_0 тем больше, чем больше координата x по направлению распространения этих колебаний.

На рис. 3.5,*б* показана зависимость от времени t скорости смещения, равной производной $\partial U / \partial t$. Эта производная равна тангенсу угла между осью абсцисс t и касательной к графику на рис. 3.5,*a*. В те моменты времени,

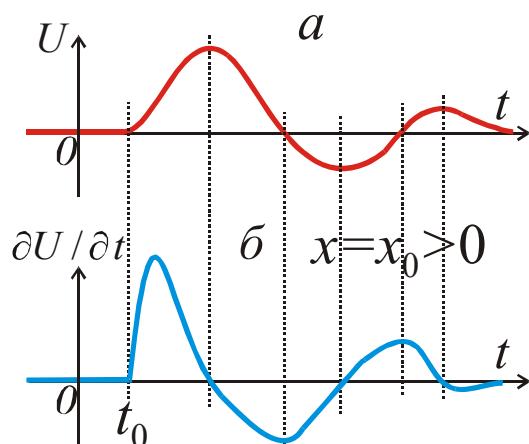


Рис. 3.5.

Соответствующие функции $F(\tau)$ на рис. 3.4 зависимости компоненты U вектора смещения и скорости $\partial U / \partial t$ изменения U со временем t при $x=x_0$

когда абсолютная величина смещения $|U|$ максимальна, скорость смещения $\partial U / \partial t = 0$.

На рис. 3.6,*a* приведена (соответствующая зависимости $U = F(\tau)$ на рис. 3.4) пространственная волна. Показано то, как меняется компонента U смещения в зависимости от координаты x в фиксированный момент времени $t=t_0 > 0$. Абсциссе $x=x_0$ соответствует положение (переднего) фронта плоской продольной волны. Из (3.21) следует, что в более поздний, по сравнению с t_0 , момент времени волна (без изменения формы колебания) перемещается в направлении оси X

со скоростью v_p .

Выше мы установили, что при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x U(x, t)$ дилатация $\theta = \text{div } \mathbf{U} = \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$. То есть в рассматриваем случае не только деформацию растяжения-сжатия ϵ_x по направлению оси X , но и относительные изменения элементарных объёмов dV характеризует производная $\partial U / \partial x$. На рис. 3.6,*б* приведена зависимость этой производной от координаты x . При $\partial U / \partial x > 0$ (в момент времени $t=t_0$) происходит растяжение, а при $\partial U / \partial x < 0$ - сжатие элементарных объёмов dV упругой среды по направлению оси X . Как видно на рис. 3.6,*б* в рассматриваемом примере у продольной упругой волны чередуются зоны сжатий и растяжений.

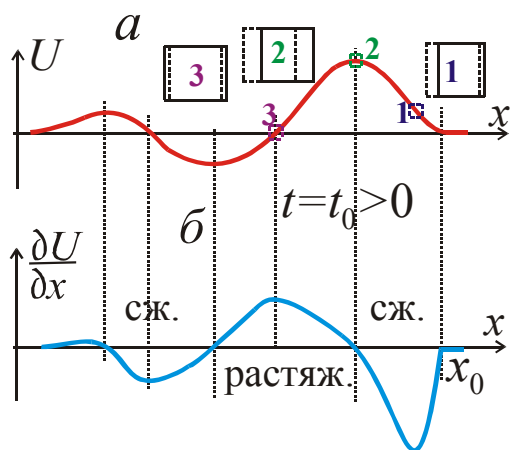


Рис. 3.6.

Зависимости компоненты U вектора смещения и производной $\partial U / \partial x$ от x при $t=t_0$

На рис. 3.6 показано также то, как меняются сечения координатных элементов объема dV при прохождении продольной упругой волны в окрестностях dV точек "1", "2", "3". Штриховой линией показано положение этих сечений до прохождения волны, а сплошной линией - эти же сечения в момент времени t_0 . Видно то, как влияют особенности зависимости $U(x)$ на деформации элементов dV . Абсолютные величины дилатации θ и деформации ϵ_x тем больше, чем более "резко" меняется компонента U смещения в зависимости от x .

3.5. Плоская поперечная упругая волна

Пусть теперь в декартовых координатах поле смещений $\mathbf{U} = \mathbf{1}_y V(x, t)$, то есть ненулевой является только y -компонента V вектора \mathbf{U} , которая зависит от времени t и от одной декартовой координаты x . Определим для этого случая пространственные производные поля \mathbf{U} , связанные с вектором вращения $\boldsymbol{\omega}$ и дилатацией θ . Согласно (1.9), (2.11), при

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_y V(x, t)$$

$$2\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{U} = \mathbf{1}_x \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \mathbf{1}_y \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \mathbf{1}_z \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \mathbf{1}_z \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Согласно (1.12), (2.12,a), при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_y V(x, t)$ дилатация

$$\theta = \text{div } \mathbf{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad \text{То есть, для рассматриваемого}$$

переменного поля смещений \mathbf{U} , в соответствии с изложенным в разделе (2.5) имеем: $\mathbf{U}_P = 0$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_S$ и в этом случае поле \mathbf{U} в однородной среде

удовлетворяет волновому уравнению (3.14): $\nabla^2 \mathbf{U}_S = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}_S}{\partial t^2}$. При

$\mathbf{U} = \mathbf{1}_y V(x, t)$ из этого уравнения получаем для y -компоненты V поля смещений аналогичное, (3.17), (3.20) уравнение струны:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (3.22)$$

Одно из 2-х решений этого уравнения, подобно (3.21), запишем в виде:

$$V = F(\tau), \quad \text{где } \tau = t - x/v_S. \quad (3.23)$$

В этом случае смещения происходят в направлениях, коллинеарных оси Y , а их распространение - в направлении оси X , то есть такое поле

смещений $\mathbf{U} = \mathbf{U}_S = \mathbf{1}_x V(x, t)$ - это один из частных случаев, соответствующих плоской поперечной упругой волне.

Пусть функция $V = F(\tau)$ имеет тот же, как показанный на рис. 3.5

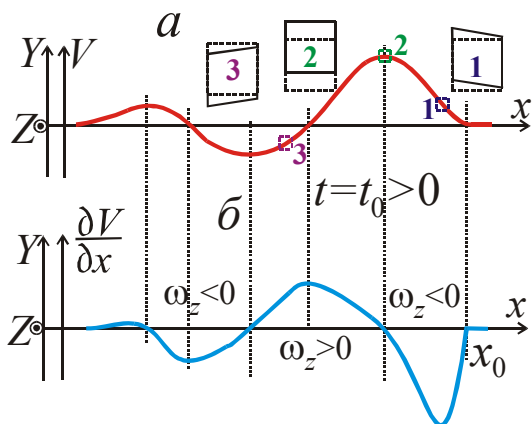


Рис. 3.7.

Зависимости компоненты V вектора смещения и производной $\partial V / \partial x$ от x при $t=t_0$

направления осей X, Y, Z . Выше было показано, что при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x V(x, t)$

имеем: $2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}_z \frac{\partial V}{\partial x}$. Это означает, что в рассматриваемом случае вектор

вращения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}_z \omega_z$, где $\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$. Кроме того, согласно (2.10,a), для

ненулевых компонент тензора чистой деформации сдвига для такого поля

\mathbf{U} получаем: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$. То есть производная $\partial V / \partial x$ одинаково

характеризует в данном случае как чистую деформацию сдвига γ_{xy} , так и

компоненту ω_z вектора вращения. Ранее мы установили (рис. 2.8), что

компонента ω_z характеризует угол поворота элемента упругой среды

вокруг оси Z . При $\omega_z > 0$ или $\omega_z < 0$ направление этого поворота образует

соответственно правовинтовую или левовинтовую систему с

направлением оси Z .

На рис. 3.7 показано также то, как меняется форма (лежащих в какой

либо из плоскостей $z=\text{const}$) сечений dS координатных элементов объёмов

dV при прохождении поперечной упругой волны в окрестности точек "1",

"2", "3". Как и на рис. 3.6, на рис. 3.7 штриховой линией показано

положение этих сечений dS до прохождения волны, а сплошной линией -

сечения dS в момент времени t_0 . Видно то, как влияет характер

зависимости $V(x)$ на деформации сечений dS элементов dV . В окрестности

точек "1", "3", где производная $\partial V / \partial x \neq 0$, элементы dV испытывают

повороты вокруг оси Z (компонента вектора вращения $\omega_z \neq 0$) и

для компоненты $U = F(\tau)$ в

предыдущем разделе, вид. Не

сложно перейти от функции

$V = F(\tau)$ к зависимости $V(t)$ при

$x=\text{const}$ - графику колебаний и

зависимости $V(x)$ при $t=\text{const}$ -

пространственной волне. При этом

функции $V(t)$ и скорости смещения

$\partial V(t) / \partial t$ будут идентичны

зависимостям $U(t)$ и $\partial U(t) / \partial t$,

приведенным на рис. 3.5.

На рис. 3.7 показаны

зависимости компоненты $V(x)$ и её

производной $\partial V / \partial x$, а также

направления осей X, Y, Z . Выше было показано, что при $\mathbf{U} = \mathbf{1}_x V(x, t)$

имеем: $2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}_z \frac{\partial V}{\partial x}$. Это означает, что в рассматриваемом случае вектор

вращения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{1}_z \omega_z$, где $\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$. Кроме того, согласно (2.10,a), для

ненулевых компонент тензора чистой деформации сдвига для такого поля

\mathbf{U} получаем: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$. То есть производная $\partial V / \partial x$ одинаково

характеризует в данном случае как чистую деформацию сдвига γ_{xy} , так и

компоненту ω_z вектора вращения. Ранее мы установили (рис. 2.8), что

компонента ω_z характеризует угол поворота элемента упругой среды

вокруг оси Z . При $\omega_z > 0$ или $\omega_z < 0$ направление этого поворота образует

соответственно правовинтовую или левовинтовую систему с

направлением оси Z .

На рис. 3.7 показано также то, как меняется форма (лежащих в какой

либо из плоскостей $z=\text{const}$) сечений dS координатных элементов объёмов

dV при прохождении поперечной упругой волны в окрестности точек "1",

"2", "3". Как и на рис. 3.6, на рис. 3.7 штриховой линией показано

положение этих сечений dS до прохождения волны, а сплошной линией -

сечения dS в момент времени t_0 . Видно то, как влияет характер

зависимости $V(x)$ на деформации сечений dS элементов dV . В окрестности

точек "1", "3", где производная $\partial V / \partial x \neq 0$, элементы dV испытывают

повороты вокруг оси Z (компонента вектора вращения $\omega_z \neq 0$) и

деформации сдвига. В окрестности точки "2", где смещение $V(x)$ - максимально, нет поворотов и деформаций сдвига.

3.6. Гармонически меняющееся скалярное поле

Пусть $\beta(t)$ - гармонически меняющаяся скалярная величина (например, ток I или напряжение \mathcal{E}). Тогда $\beta(t) = \beta_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, где β_0 -

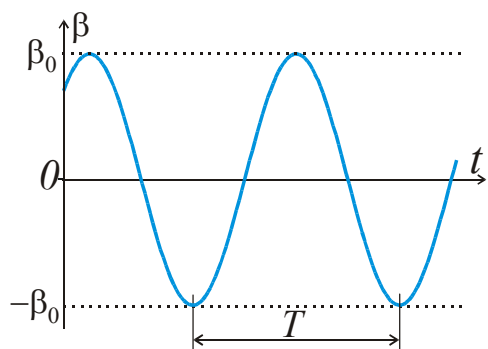


Рис. 3.8.

Гармонически меняющаяся скалярная величина β

амплитуда, φ - начальная фаза величины β , сумма $\frac{2\pi t}{T} + \varphi$ - фаза, T - период, t - время (рис. 3.8). Величина, обратная периоду $1/T=f$ - частота колебаний, а $2\pi f=\omega$ - круговая частота. При этих обозначениях $\beta(t) = \beta_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Если β - скалярное гармонически меняющееся поле (или скалярная компонента векторного гармонически меняющегося поля), то, кроме

времени t , β зависит от положения в пространстве точки наблюдения a :

$$\beta(a, t) = \beta_0(a) \cos[\omega t + \varphi(a)]. \quad (3.24)$$

При записи (3.24) принято во внимание, что амплитуды колебаний β_0 и начальные фазы φ могут быть разными в разных точках пространства, то есть зависят от положения точки a .

Из (3.24) следует, что $\beta(a, t) = \beta_0(a) \{ \cos[\varphi(a)] \cos(\omega t) - \sin[\varphi(a)] \sin(\omega t) \}$. Так как $-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \pi/2)$, то $\beta(a, t) = \{ \beta_0(a) \cos[\varphi(a)] \} \cos(\omega t) + \{ \beta_0(a) \sin[\varphi(a)] \} \cos(\omega t + \pi/2)$. (3.25)

Согласно (3.25), гармонически меняющееся скалярное поле можно представить, как сумму двух колебаний с нулевой начальной фазой и начальной фазой, равной $\pi/2$ (90°). Эти слагаемые называют реактивной и активной составляющими поля β .

Гармонически меняющееся поле $\beta(a, t)$ можно представить в более удобном (для ряда математических преобразований, в частности, при решении прямых задач), по сравнению с (3.24), виде, воспользовавшись комплексной (символической) записью. Вспомним некоторые определения, понятия, относящиеся к комплексным числам и величинам.

Комплексное число (или величина) $z = x + i \cdot y$, где x и y - соответственно действительная часть ($\text{Re}(z)$) и коэффициент при мнимой части ($\text{Im}(z)$) числа z , а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Каждому комплексному числу z можно поставить в соответствие точку на комплексной плоскости с декартовыми осями X, Y (рис. 3.9). На оси X ($y=0$) лежит множество действительных чисел, а на оси Y ($x=0$) - множество мнимых чисел. В частности, оси Y лежат числа i и $-i$ (рис. 3.9). Модуль комплексного числа z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а аргумент комплексного числа z : $\psi = \text{Arg}(z) = \arctg(y/x) + n\pi$, $n=0, 1$ (точнее $\psi = \text{atan2}(y, x)$). На рис. 3.9 видно, что $x = |z| \cos \psi$, $y = |z| \sin \psi$, следовательно $z = |z| (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\exp(\pm i\psi) = (\cos \psi \pm i \cdot \sin \psi), \quad (3.26)$$

согласно которой экспонента мнимого аргумента $i\psi$ может быть выражена через синус и косинус действительного аргумента ψ .

Пользуясь (3.26), можем представить комплексное число (или величину) z в виде: $z = |z| \exp(i\psi)$. При такой форме записи удобно перемножать и делить комплексные величины. Например, пусть

$$z = |z| \exp(i\psi) = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\psi_1) \cdot |z_2| \exp(i\psi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \exp(i\psi_1) \cdot \exp(i\psi_2) =$$

$= |z_1| \cdot |z_2| \exp[i(\psi_1 + \psi_2)]$, то есть модуль $|z|$ произведения z двух комплексных величин z_1, z_2 равен произведению их модулей $|z_1| \cdot |z_2|$, а

аргумент ψ равен сумме $\psi_1 + \psi_2$ их аргументов. В частности, принимая во внимание, что модуль мнимых чисел $\pm i$ равен единице, а аргумент $\text{Arg}(\pm i) = \pm \pi/2$ (см. рис. 3.9), произведение $\pm i \cdot z = \exp(\pm i \cdot \pi/2) \cdot |z| \cdot \exp(i\psi) = |z| \cdot \exp[i(\psi \pm \pi/2)]$. Следовательно, аргумент произведения $\pm i \cdot z$ отличается от аргумента z на величину $\pm \pi/2$.

Перейдём к комплексной записи скалярного гармонически меняющегося поля $\beta(a, t)$. В соответствии с (3.24) и формулой Эйлера (3.26) можем представить $\beta(a, t)$ в следующем виде:

$$\beta(a, t) = \text{Re}[\check{\beta}(a, t)], \quad \text{где } \check{\beta}(a, t) = \beta_0(a) \exp\{\pm i[\omega t + \varphi(a)]\}, \quad (3.27)$$

так как действительная часть $\text{Re}\{\pm i[\omega t + \varphi(a)]\} = \cos[\omega t + \varphi(a)]$. Далее будем в (3.27) из знаков \pm (как обычно принято в теории распространения упругих колебаний) выбирать верхний знак (плюс). Какие преимущества имеет запись (3.27) гармонически меняющегося поля $\beta(a, t)$ по сравнению с более простой и понятной записью (3.24)? Примем во внимание, что экспонента суммы равна произведению экспонент слагаемых (в этой сумме), то есть $\exp\{i[\omega t + \varphi(a)]\} = \exp(i\omega t) \cdot \exp[i\varphi(a)]$.

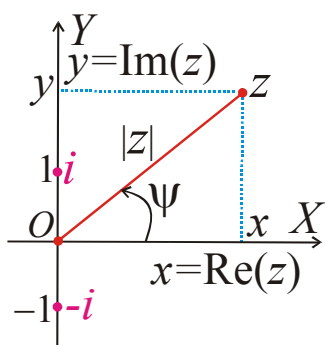


Рис. 3.9.

Комплексные числа и величины

Поэтому второе выражение в (6.43) можем представить в следующем виде:

$$\check{\beta}(a, t) = \check{\beta}_0(a) \cdot \exp(i\omega t), \text{ где } \check{\beta}_0(a) = \beta_0(a) \cdot \exp[i\varphi(a)]. \quad (3.28)$$

Из первого выражения в (3.28) следует что при применении комплексной записи (комплексное) скалярное поле $\check{\beta}(a, t)$ является произведением двух взаимно-независимых функций. Первая из них- *комплексная амплитуда* $\check{\beta}_0(a)$ не зависит от времени t , а вторая- *временной фактор* $\exp(i\omega t)$ при фиксированной круговой частоте ω зависит только от времени t и одинаков в любой точке пространства. Согласно второму выражению в (3.28), модуль $|\check{\beta}_0(a)|$ комплексной амплитуды $\check{\beta}_0(a)$ равен (действительной) амплитуде $\beta_0(a)$ поля $\beta(a, t)$, а аргумент комплексной амплитуды $\text{Arg}[\check{\beta}_0(a)] = \varphi(a)$ - равен начальной фазе $\varphi(a)$ поля $\beta(a, t)$. В соответствии с (3.28) и формулой Эйлера (3.26) действительная часть комплексной амплитуды $\text{Re}(\check{\beta}_0(a)) = \beta_0(a) \cdot \cos[\varphi(a)]$, а коэффициент при её мнимой части $\text{Im}(\check{\beta}_0(a)) = \beta_0(a) \cdot \sin[\varphi(a)]$ связаны с амплитудами реактивной и активной составляющих поля β в (3.25).

Итак, при заданных круговой частоте ω и времени t комплексная амплитуда $\check{\beta}_0(a)$ полностью характеризует зависимость поля $\beta(a, t)$ (его амплитуды, начальной фазы, реактивной и активной составляющих) от положения точки a в пространстве, см. (3.24), (3.25).

То, что при записи в (3.28) для $\check{\beta}(a, t)$ аргументы (переменные) a, t разделены, делает простым дифференцирование поля $\check{\beta}(a, t)$ по времени t и по пространственным координатам. Например, $\frac{\partial}{\partial t} \check{\beta}(a, t) =$

$$= \frac{\partial}{\partial t} [\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(i\omega t)] = \check{\beta}_0(a) \frac{\partial}{\partial t} [\exp(i\omega t)] = i\omega \check{\beta}_0(a) [\exp(i\omega t)] = i\omega \check{\beta}(a, t),$$

то есть в любой момент времени t в произвольной точке a пространства $\frac{\partial \check{\beta}}{\partial t} = i\omega \check{\beta}$. Учитывая сказанное выше, это означает, что амплитуда

производной $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ поля β (численно) отличается от амплитуды поля β в ω

раз, а начальные фазы полей $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ и β отличаются на $\pi/2$ (90°). Аналогично

для пространственных производных поля $\check{\beta}(a, t)$ можно воспользоваться тем, что временной фактор $\exp(i\omega t)$ не зависят от пространственных координат. То есть, например,

$$\text{grad}[\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(i\omega t)] = [\text{grad} \check{\beta}_0(a)] \cdot \exp(i\omega t).$$

Следует заметить, что при комплексной записи (3.27), (3.28) гармонически меняющихся полей над полями можно проводить только линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование). Такие операции выполняются отдельно над действительными и мнимыми частями комплексных величин и результаты таких операций над $\beta(a,t)$ и $\text{Re}[\tilde{\beta}(a,t)]$ будут одинаковы. Если же, например, требуется выполнить перемножение гармонически меняющихся величин, то необходимо вводить комплексно-сопряженные величины, либо применять "действительную" форму записи (3.24). Это же относится и к векторным полям, о которых сейчас пойдет речь.

3.7. Гармонически меняющееся векторное поле

У гармонически меняющегося векторного поля \mathbf{N} скалярная компонента N_l по любому направлению l меняется со временем t по тому же закону (3.24), что и скалярное гармонически меняющееся поле $\beta(a,t)$. Это означает, что, например, в декартовой системе координат x, y, z гармонически меняющееся векторное поле \mathbf{N} определяет совокупность следующих равенств.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{N}_x + \mathbf{N}_y + \mathbf{N}_z = \mathbf{1}_x N_x + \mathbf{1}_y N_y + \mathbf{1}_z N_z, \\ N_x(a,t) &= N_{x0}(a) \cos[\omega t + \varphi_x(a)], N_y(a,t) = N_{y0}(a) \cos[\omega t + \varphi_y(a)], \\ N_z(a,t) &= N_{z0}(a) \cos[\omega t + \varphi_z(a)]. \end{aligned} \right\} (3.29)$$

При этом, конечно, амплитуды N_{x0}, N_{y0}, N_{z0} скалярных компонент поля \mathbf{N} (в общем случае) - не одинаковы и не одинаковы также начальные фазы $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ этих компонент. Тогда, согласно (3.29), гармонически меняющееся векторное поле - это, в общем случае, сумма 3-х не синхронно меняющихся с одинаковой круговой частотой ω 3-х взаимно-ортогональных векторов $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y, \mathbf{N}_z$. Можно доказать, что если (при соответствующем выборе направления осей X, Y, Z) один из этих 3-х векторов равен нулю, то гармонически меняющееся векторное поле - эллиптически поляризовано. Это означает, что с течением времени (в данной точке пространства a) конец вектора \mathbf{N} будет перемещаться по такой линии, как эллипс (рис. 3.10,а).

В частных случаях гармонически меняющееся векторное поле может иметь круговую поляризацию ("вращающееся поле")- рис. 3.10,б или линейную поляризацию рис. 3.10,в. Для линейной поляризации гармонически меняющегося поля \mathbf{N} нужно, чтобы в какой либо системе ортогональных координат две из 3-х компонент вектора \mathbf{N} были равны нулю, либо чтобы начальные фазы этих 3-х компонент были одинаковы.

Если бы, например, при решении прямых задач теории гармонически меняющегося векторного поля пришлось определять его (в пространственных производных и производных по времени) при помощи

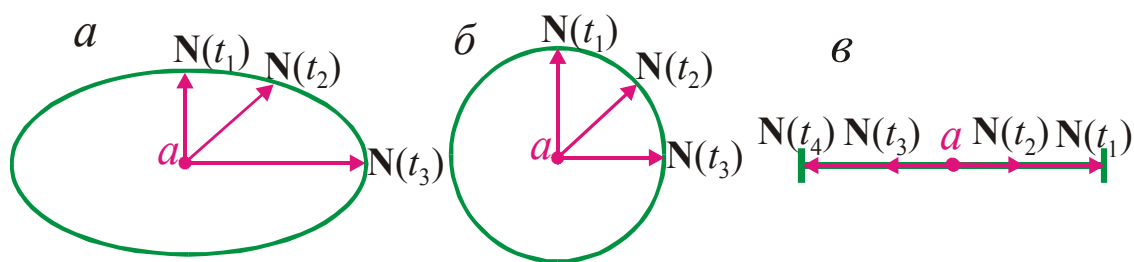


Рис. 3.10.

Эллиптическая (а), круговая (б) и линейная (в) поляризация векторного гармонически меняющегося поля

выражений вида (3.29), то это было бы очень не просто. А что получится, если подобно (3.27), (3.28) применить для скалярных компонент поля \mathbf{N} комплексную запись? Полагая

$$\begin{aligned} N_x(a, t) &= \operatorname{Re}[\check{N}_x(a, t)], & \check{N}_x(a, t) &= \check{N}_{x_0}(a) \cdot \exp(i\omega t); \\ N_y(a, t) &= \operatorname{Re}[\check{N}_y(a, t)], & \check{N}_y(a, t) &= \check{N}_{y_0}(a) \cdot \exp(i\omega t); \\ N_z(a, t) &= \operatorname{Re}[\check{N}_z(a, t)], & \check{N}_z(a, t) &= \check{N}_{z_0}(a) \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

в соответствии с (3.29), получаем для вектора $\check{\mathbf{N}}$ с комплексными скалярными компонентами \check{N}_x , \check{N}_y , \check{N}_z следующее выражение:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{N}} &= \mathbf{1}_x \check{N}_x + \mathbf{1}_y \check{N}_y + \mathbf{1}_z \check{N}_z = \\ &= \mathbf{1}_x \check{N}_{x_0}(a) \cdot \exp(i\omega t) + \mathbf{1}_y \check{N}_{y_0}(a) \cdot \exp(i\omega t) + \mathbf{1}_z \check{N}_{z_0}(a) \cdot \exp(i\omega t) = \\ &= [\mathbf{1}_x \check{N}_{x_0}(a) + \mathbf{1}_y \check{N}_{y_0}(a) + \mathbf{1}_z \check{N}_{z_0}(a)] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

то есть при применении комплексной формы записи для векторного гармонически меняющегося поля имеем:

$$\check{\mathbf{N}}(a, t) = \check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(i\omega t), \quad (3.30)$$

где $\check{\mathbf{N}}_0(a) = \mathbf{1}_x \check{N}_{x_0}(a) + \mathbf{1}_y \check{N}_{y_0}(a) + \mathbf{1}_z \check{N}_{z_0}(a)$ - не зависящий от времени вектор с комплексными скалярными компонентами, являющимися комплексными амплитудами соответствующих компонент поля \mathbf{N} . Это означает, что, например, абсолютная величина $|\check{N}_{x_0}(a)| = N_{x_0}(a)$, а $\operatorname{Arg}(\check{N}_{x_0}(a)) = \varphi_x(a)$.

По форме комплексная запись (3.30) гармонически меняющегося векторного поля \mathbf{N} идентична представлению в комплексной форме (3.28) скалярного поля β . В (3.30), как и в (3.28), поле выражено как произведение 2-х взаимно независимых функций аргументов a (пространственных координат точки наблюдения a) и времени t . Это делает удобным дифференцирование поля $\check{\mathbf{N}}$ по времени и по

пространственным координатам. Например, $\frac{\partial}{\partial t} \check{\mathbf{N}} =$
 $= \frac{\partial}{\partial t} [\check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(i\omega t)] = \check{\mathbf{N}}_0(a) \frac{\partial}{\partial t} [\exp(i\omega t)] = i\omega \check{\mathbf{N}}_0(a) [\exp(i\omega t)] = i\omega \check{\mathbf{N}}.$

Аналогичным образом вторая производная по времени $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \check{\mathbf{N}} =$
 $= (i\omega) \cdot (i\omega) \cdot \check{\mathbf{N}} = -\omega^2 \check{\mathbf{N}} = -\omega^2 \check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(i\omega t).$ Для первых
 пространственных производных получаем:
 $\text{rot}[\check{\mathbf{N}}(a, t)] = [\text{rot} \check{\mathbf{N}}_0(a)] \cdot \exp(i\omega t), \text{div}[\check{\mathbf{N}}(a, t)] = [\text{div} \check{\mathbf{N}}_0(a)] \cdot \exp(i\omega t).$

Следовательно, временной фактор $\exp(i\omega t)$ является общим множителем как выражениях для полей $\check{\beta}, \check{\mathbf{N}}$, так и в уравнениях для пространственных производных, либо производных этих полей по времени t . Поэтому мы можем разделить все члены таких уравнений для $\check{\beta}, \check{\mathbf{N}}$ на $\exp(i\omega t)$ и получить аналогичные уравнения для не зависящих от времени t записанных в комплексной форме полей $\check{\beta}_0(a), \check{\mathbf{N}}_0(a)$.

Далее при рассмотрении гармонически меняющихся полей будем, как правило, пользоваться комплексной формой записи.

3.8. Ряд Фурье

Пусть $F(t)$ - периодическая (с периодом T) функция аргумента t (в "нашем" случае t - время).

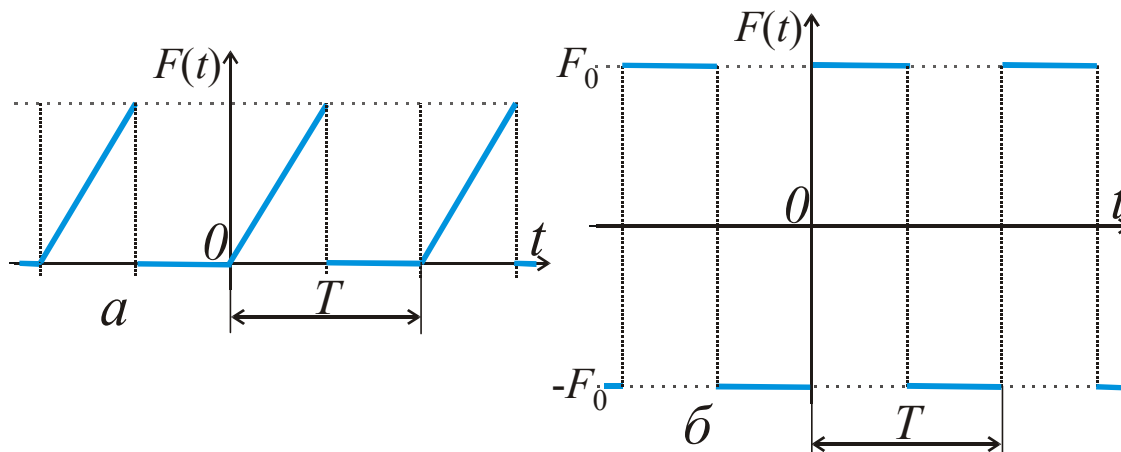


Рис. 3.11.

Примеры периодических функций $F(t)$ с периодом T

Пользуясь рядом Фурье, можем представить $F(t)$ как сумму гармонических колебаний ("гармоник"). Обозначим $T=1/f, f=2\pi\omega, T=1/(2\pi\omega)$. Отсюда следует, что произведение

$$\omega T = 2\pi. \tag{3.31}$$

Ряд Фурье для периодической функции $F(t)$:

$$F(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n \cdot \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n \cdot \omega t). \quad (3.32)$$

В последнем выражении n - номер гармоники, b_0, b_n, a_n - коэффициенты Фурье, которые, конечно, зависят от (вида) функции $F(t)$:

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} F(t) \cos(n \cdot \omega t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} F(t) \sin(n \cdot \omega t) dt. \quad (3.33)$$

В соответствии с (3.33) коэффициент b_0 равен среднему за период T значению функции $F(t)$, а коэффициенты b_n, a_n характеризуют амплитуды и начальные фазы гармоник, суммой которых мы можем представить функцию, равную разности $F(t) - b_0$.

Пример расчёта коэффициентов Фурье. Пусть функция времени t $F(t)$ - это имеющие одинаковую длительность разнополярные прямоугольные импульсы без "пауз" ("меандр") (рис. 3.11,б).

Задание. Определить коэффициенты Фурье для такой функции $F(t)$.

Решение. В (3.33) удобно выбрать $t=0$. Тогда из (3.33) получаем:

$$b_0 = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} F_0 dt + \int_{T/2}^T (-F_0) dt \right] = \frac{F_0}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 - T + \frac{T}{2} \right) = 0. \text{ То есть,}$$

конечно, в этом примере среднее за период T значение b_0 такой функции $F(t)$ равно нулю.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2F_0}{T} \left[\int_0^{T/2} \cos(n \cdot \omega t) dt - \int_{T/2}^T \cos(n \cdot \omega t) dt \right] = \\ &= \frac{2F_0}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left[\int_0^{T/2} \cos(n\omega t) d(n\omega t) - \int_{T/2}^T \cos(n\omega t) d(n\omega t) \right] = \\ &= \frac{2F_0}{n(\omega T)} \left\{ \sin[n(\omega t)]_0^{T/2} - \sin[n(\omega t)]_{T/2}^T \right\}. \end{aligned}$$

Согласно (3.31), $\omega T = 2\pi$. Поэтому

$$b_n = \frac{F_0}{\pi n} \{ \sin(\pi n) - 0 - \sin(2\pi n) + \sin(\pi n) \} = 0, \text{ так как при целом } n \text{ имеем:}$$

$$\sin(\pi n) = 0, \quad \sin(2\pi n) = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2F_0}{T} \left[\int_0^{T/2} \sin(n \cdot \omega t) dt - \int_{T/2}^T \sin(n \cdot \omega t) dt \right] = \\ &= \frac{2F_0}{T} \cdot \frac{1}{n\omega} \left[\int_0^{T/2} \sin(n\omega t) d(n\omega t) - \int_{T/2}^T \sin(n\omega t) d(n\omega t) \right] = \\ &= \frac{2F_0}{n(\omega T)} \left\{ \sin[n(\omega t)]_0^{T/2} - \sin[n(\omega t)]_{T/2}^T \right\}. \end{aligned}$$

Согласно (3.31), $\omega T = 2\pi$. Поэтому

$$a_n = \frac{F_0}{\pi n} \{ 1 - \cos(\pi n) + 1 - \cos(\pi n) \} = \frac{2F_0}{\pi n} [1 - \cos(\pi n)].$$

Получим выражения для коэффициентов a_n при $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$1) n=1. \quad \cos(1 \cdot \pi) = -1, \quad a_1 = \frac{2F_0}{\pi} [1 - (-1)] = \frac{4F_0}{\pi}.$$

$$2) n=2. \quad \cos(2 \cdot \pi) = 1, \quad a_2 = \frac{F_0}{\pi} [1 - 1] = 0.$$

$$3) n=3. \quad \cos(3 \cdot \pi) = -1, \quad a_3 = \frac{2F_0}{3\pi} [1 - (-1)] = \frac{4F_0}{3\pi}.$$

$$4) n=4. \quad \cos(4 \cdot \pi) = 1, \quad a_4 = \frac{F_0}{\pi} [1 - 1] = 0.$$

$$5) n=5. \quad \cos(5 \cdot \pi) = -1, \quad a_5 = \frac{2F_0}{3\pi} [1 - (-1)] = \frac{4F_0}{5\pi}, \dots$$

Итак, "меандр" (рис. 3.11,б) можно выразить, как сумму нечётных гармоник по $\sin(n \cdot \omega t)$:
$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right].$$

Амплитуда этих нечётных гармоник - обратно пропорциональна их "номеру" n .

3.9. Интеграл (преобразование) Фурье в комплексной форме

Если $F(t)$ - не периодическая функция аргумента t , то её можно выразить интегралом Фурье. Ниже нам нужно будет воспользоваться интегралом Фурье в комплексной форме:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.34)$$

В (3.34) функция $F(t)$ - сумма гармонических колебаний при их "сплошном" (в отличие от (3.32)) спектре круговых частот ω . Частоты ω - любое рациональное число, то есть частоты в (3.34) меняются от $-\infty$ до $+\infty$.

В (3.34) $S(\omega)$ - спектральная плотность (спектр) функции $F(t)$.

Спектральную плотность $S(\omega)$ функции $F(t)$ определяет выражение:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3.35)$$

В принципе, в выражениях (3.34), (3.35) можно поменять знаки в аргументах $(i\omega t)$ и $(-i\omega t)$ экспонент. Но ниже будем пользоваться теми знаками, которые приведены в этих выражениях.

При применении преобразования Фурье можно также воспользоваться "теоремой о свёртке". Она доказывает следующее. Если сигнал, на "входе" линейного преобразователя Л.П. - функция $F_{\text{ВХ.}}(t)$ со спектром $S_{\text{ВХ.}}(\omega)$, то сигнал, на "выходе" линейного преобразователя - функция $F_{\text{ВЫХ.}}(t)$ со спектром $S_{\text{ВЫХ.}}(\omega)$, то, в соответствии с теоремой о свёртке

$$F_{\text{ВЫХ.}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ.}}(\omega) * S_{\text{Л.П.}}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.36)$$

В (3.36) $S_{Л.П.}(\omega)$ - спектральная характеристика линейного преобразователя Л.П. Таким линейным преобразователем может служить среда (модель среды). Тогда спектральную характеристику $S_{Л.П.}(\omega)$ можно определить на основе решения прямой задачи для гармонически меняющегося поля с круговой частотой ω для соответствующей модели среды.

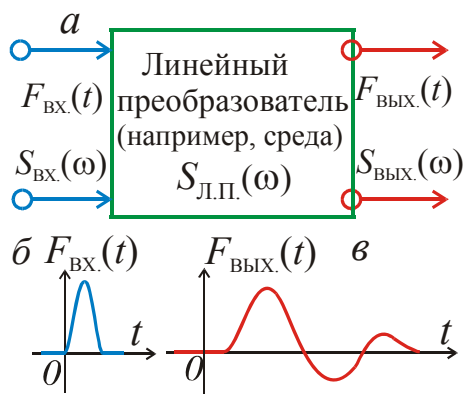


Рис. 3.12.

К преобразованию Фурье

выражения:

3.10. Спектральные характеристики прямоугольного импульса и δ -функции Дирака

Пусть показанную на рис. 3.13,а синим цветом функцию $F(t)$ определяют

$$F(t) = \begin{cases} h & \text{при } |t| \leq t_0/2, \\ 0 & \text{при } t > t_0/2, \end{cases} \quad (3.37)$$

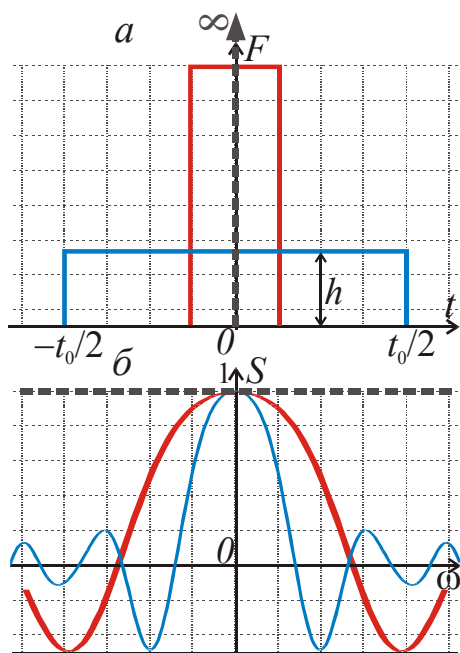


Рис. 3.13.

Прямоугольный импульс и δ -функция Дирака (а); их спектральные характеристики (б)

а (численно) произведение $t_0 \cdot h = 1$, то есть $h = 1/t_0$. Это означает, что площадь показанного на 3.13,а прямоугольного импульса численно равна единице. Согласно (3.35), спектральная характеристика такой функции $S(\omega) = h \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \exp(-i\omega t) dt$. По формуле Эйлера (3.26) $\exp(-i\omega t) = \cos(\omega t) - i \cdot \sin(\omega t)$. Поэтому

$$S(\omega) = h \cdot \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \cos(\omega t) dt - i \cdot h \cdot \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \sin(\omega t) dt.$$

Принимая во внимание,

что $dt = \frac{1}{\omega} d(\omega t)$, получаем:

$$S(\omega) = \frac{h}{\omega} \cdot \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \cos(\omega t) d(\omega t) - i \cdot \frac{h}{\omega} \cdot \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \sin(\omega t) d(\omega t) =$$

$$= \frac{h}{\omega} \cdot \left\{ \sin \frac{\omega t_0}{2} - \sin \frac{-\omega t_0}{2} - i \left[-\cos \frac{\omega t_0}{2} + \cos \frac{-\omega t_0}{2} \right] \right\}.$$

Учитывая, что $h = 1/t_0$, можем представить выражение для спектральной характеристики $S(\omega)$ в виде:

$$S(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}}. \quad (3.38)$$

В числителе и знаменателе выражения (3.38) для $S(\omega)$ - нечётные функции ω . Следовательно, их отношение - чётная функция $S(\omega)$. При $\omega \rightarrow 0$ функция $S(0) \rightarrow 1$ (первый замечательный предел). Для показанной на 3.13,а синим цветом зависимости $F(t)$ её спектральная характеристика тем же цветом показана на рис. 3.13,б.

Пусть теперь у прямоугольного импульса уменьшилась длительность t_0 , а значение h увеличилось так, чтобы произведение $t_0 \cdot h$ не изменилось (численно $t_0 \cdot h = 1$). Такая зависимость $F(t)$ показана на 3.13,а красным цветом. В соответствии с (3.38) этой зависимости $F(t)$ соответствует показанная тем же цветом спектральная характеристика $S(\omega)$ на 3.13,б. Видно, что уменьшение длительности t_0 приводит к "растяжению" $S(\omega)$ по оси абсцисс.

В предельном случае ($t_0 \rightarrow 0$, $h \rightarrow \infty$, $t_0 \cdot h = 1$) получаем дельта-функцию Дирака $\delta(t)$:

$$\delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0, \quad \delta(t) = \infty \text{ при } t = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.38,а)$$

В соответствии с (3.38) и первым замечательным пределом при $t_0 \rightarrow 0$ спектральная характеристика дельта-функции Дирака $\delta(t)$:

$$S_{\delta}(\omega) = 1. \quad (3.38,б)$$

На рис. 3.13 функция $\delta(t)$ и её спектральная характеристика $S_{\delta}(\omega)$ показаны штриховыми линиями серого цвета. Согласно (3.34), (3.38,а), (3.38,б), функцию $\delta(t)$ можно выразить суммой косинусов, амплитуды которых равны единице, а круговые частоты ω - непрерывно меняются от $-\infty$ до $+\infty$.

3.11. Уравнения Гельмгольца для гармонически меняющихся полей смещений U_P, U_S

В соответствии с (3.30) пользуясь комплексной записью гармонически меняющегося векторное поле $\check{\mathbf{N}}(a, t)$ можем представить в виде: $\check{\mathbf{N}}(a, t) = \check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(i\omega t)$, где $\check{\mathbf{N}}_0(a)$ - не зависящий от времени t вектор. Его скалярные компоненты - комплексные амплитуды соответствующих компонент поля \mathbf{N} .

В однородной абсолютно-упругой среде для полей U_P, U_S ранее получили (однородные) волновые уравнения: $\nabla^2 U_P = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 U_P}{\partial t^2}$,

$\nabla^2 U_S = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 U_S}{\partial t^2}$. Если поля U_P, U_S - гармонически меняющиеся и мы

пользуемся комплексной формой записи, то $\check{U}_P(a,t) = \check{U}_{P_0}(a) \cdot \exp(i\omega t)$
 $\check{U}_S(a,t) = \check{U}_{S_0}(a) \cdot \exp(i\omega t)$. Далее обозначение $\check{U}_P(a,t), \check{U}_S(a,t)$, для
 полей $U_P(a,t), U_S(a,t)$ в комплексной форме заменим на более простое:
 $U_P(a,t), U_S(a,t)$. Комплексные амплитуды этих полей обозначим
 $U_{P_0}(a), U_{S_0}(a)$.

При таких обозначениях, например, гармонически меняющееся поле
 $U_P(a,t) = U_{P_0}(a) \cdot \exp(i\omega t)$. Тогда первая производная по времени
 $\frac{\partial U_P(a,t)}{\partial t} = i\omega \cdot U_{P_0}(a) \cdot \exp(i\omega t) = i\omega \cdot U_P(a,t)$. Вторая производная по

времени $\frac{\partial^2 U_P(a,t)}{\partial t^2} = (i\omega) \cdot (i\omega) \cdot U_{P_0}(a) \cdot \exp(i\omega t) = -\omega^2 U_P(a,t)$.

Обозначим

$$k_P = \frac{\omega}{v_P} = \frac{2\pi f}{v_P} = \frac{2\pi}{\Lambda_P}, \quad (3.39)$$

где, $k_P = 2\pi / \Lambda_P$ - волновое число, а $\Lambda_P = v_P \cdot f$ - длина волны для поля
 смещений U_P . Таким образом из волнового уравнения для U_P получаем
 для гармонически меняющегося поля U_P (при применении комплексной
 записи) уравнение Гельмгольца.

$$\nabla^2 U_P(a,t) + k_P^2 U_P(a,t) = 0. \quad (3.40)$$

При сокращении всех членов этого уравнения на (входящий во все члены
 этого уравнения) множитель $\exp(i\omega t)$ получаем такого же вида уравнение
 и для не зависящего от времени вектора U_{P_0} :

$$\nabla^2 U_{P_0}(a) + k_P^2 U_{P_0}(a) = 0. \quad (3.40, a)$$

В соответствии с (3.40,a), (2.12,б), (3.12) для скалярного потенциала
 $\Phi(a,t) = \Phi_0(a) \cdot \exp(i\omega t)$ потенциальной составляющей U_P гармонически
 меняющегося поля смещений и комплексной амплитуды $\Phi_0(a)$ этого
 потенциала в однородной упругой среде справедливы уравнения:

$$\nabla^2 \Phi(a,t) + k_P^2 \cdot \Phi(a,t) = 0, \quad \nabla^2 \Phi_0(a) + k_P^2 \cdot \Phi_0(a) = 0. \quad (3.41)$$

Аналогичным образом из волновых уравнений (соответствующим
 распространению поперечной упругой волны) поля смещений U_S и его
 векторного потенциала Ψ ($U_S = \text{rot} \Psi$) получаем для гармонически
 меняющегося поля U_S и векторного потенциала Ψ этого поля следующие
 уравнения (Гельмгольца):

$$\nabla^2 U_S(a,t) + k_S^2 U_S(a,t) = 0, \quad \nabla^2 \Psi(a,t) + k_S^2 \Psi(a,t) = 0, \quad (3.42)$$

где Ψ - векторный потенциал поля смещений, а волновое число (для поля
 U_S поперечных упругих волн):

$$k_S = \frac{\omega}{v_S} = \frac{2\pi f}{v_S} = \frac{2\pi}{\Lambda_S}. \quad (3.43)$$

3.12. Некоторые решения уравнения Гельмгольца, соответствующие гармоническим плоским P и S волнам в однородной среде

Пусть в декартовых координатах гармонически меняющееся со временем поле смещений $U_P = \mathbf{1}_x \cdot U_x(x, t) = \mathbf{1}_x \cdot U(x, t)$, где в соответствии с принятыми в теории распространения упругих колебаний обозначениями $U = U_x$ - x -компонента поля смещений U . При применении комплексной записи U гармонически меняющегося поля U можем представить в виде: $U = U_0(x) \cdot \exp(i\omega t)$, где $U_0(x)$ - не зависящая от времени t комплексная амплитуда. Из уравнения Гельмгольца (3.40) для скалярной компоненты U вектора U_P получаем: $\nabla^2 U(x, t) + k_P^2 U(x, t) = 0$. В декартовых координатах

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad \text{При } U = U(x, t) \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \text{то есть для}$$

компоненты U справедливо уравнение $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k_P^2 U = 0$. Множитель

$\exp(i\omega t)$ содержат оба члена этого уравнения. Сокращая этот множитель, получаем для комплексной амплитуды $U_0(x)$ обыкновенное

дифференциальное уравнение второго порядка: $\frac{d^2 U_0}{dx^2} = -k_P^2 U_0$.

Очевидно, что два частных решения этого уравнения: $\sin(k_P x)$, $\cos(k_P x)$. Но при применении комплексной записи два частных решения этого уравнения удобно представить в ином виде: $\exp(ik_P x)$, $\exp(-ik_P x)$. При учёте того, что $U = U_0(x) \cdot \exp(i\omega t)$, решение для компоненты U : $U(x, t) = U(0, 0) \cdot \exp(\pm ik_P x) \cdot \exp(i\omega t) = U(0, 0) \cdot \exp[i\omega(t \pm x/v_P)]$ так как $k_P = \omega/v_P$. Здесь $U(0, 0)$ - значение компоненты U при $t=0$, $x=0$.

Если в декартовых координатах гармонически меняющееся поле смещений $U_P = \mathbf{1}_z \cdot U_z(z, t) = \mathbf{1}_z \cdot W(z, t)$, где $W = U_z$ - z -компонента поля смещений U , то соответствующие решения уравнения $\nabla^2 W(z, t) + k_P^2 W(z, t) = 0$ можем представить в виде: $W = W(0, 0) \cdot \exp[i(\omega t \pm k_P z)] = W(0, 0) \cdot \exp[i\omega(t \pm z/v_P)]$, где $W(0, 0)$ - значение компоненты W при $t=0$, $z=0$. В выражении для W нижний знак (-) отвечает волне, распространяющейся в направлении оси Z , а верхний знак (+) - волне, распространяющейся в направлении, противоположном направлению этой оси.

3.13 Граничные условия для полей смещений U_p , U_s

На рис. 3.14 S - граница 2-х (порознь) однородных упругих сред (областей пространства). В области V_1 : упругие постоянные Ламэ λ_1 , μ_1 и плотность ρ_1 , а соответствующие этим параметрам скорости продольных и поперечных волн: v_{P1} , v_{S1} . Соответственно в области V_2 имеем: $\lambda = \lambda_2$, $\mu = \mu_1$, $\rho = \rho_2$, $v_P = v_{P2}$, $v_S = v_{S2}$.

Сначала напомним о том, что в соответствии с изложенным выше, в однородной области V_1 составляющие U_{P1} , U_{S1} поля смещений U_1 удовлетворяют волновым уравнениям $\nabla^2 U_{P1} = \frac{1}{v_{P1}^2} \frac{\partial^2 U_{P1}}{\partial t^2}$,

$$\nabla^2 U_{S1} = \frac{1}{v_{S1}^2} \frac{\partial^2 U_{S1}}{\partial t^2}.$$

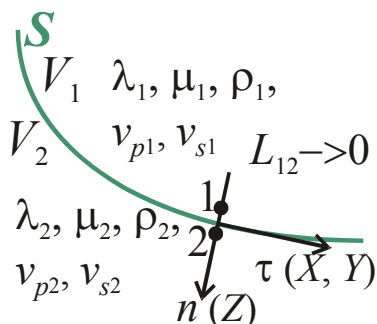


Рис. 3.14.

К граничным условиям для полей смещений

гармонически меняющиеся с круговой частотой ω и мы пользуемся комплексной формой записи, то эти поля удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 U_{P1} + k_{P1}^2 U_{P1} = 0,$$

$$\nabla^2 U_{S1} + k_{S1}^2 U_{S1} = 0.$$

В соответствии с (3.39), (3.43) волновые числа $k_{P1} = \omega/v_{P1}$, $k_{S1} = \omega/v_{S1}$. Аналогичным образом, в однородной области V_2 волновые уравнения для U_{P2} , U_{S2} :

$$\nabla^2 U_{P2} = \frac{1}{v_{P2}^2} \frac{\partial^2 U_{P2}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 U_{S2} = \frac{1}{v_{S2}^2} \frac{\partial^2 U_{S2}}{\partial t^2}.$$

Уравнения для гармонически меняющихся полей U_{P2} , U_{S2} в области V_2 : $\nabla^2 U_{P2} + k_{P2}^2 U_{P2} = 0$, $\nabla^2 U_{S2} + k_{S2}^2 U_{S2} = 0$, а волновые числа $k_{P2} = \omega/v_{P2}$, $k_{S2} = \omega/v_{S2}$.

Установим теперь то, каким условиям (при решении прямых задач теории распространения упругих колебаний) должно удовлетворять поле смещений U или его декартовы компоненты U , V , W на границе S областей V_1 , V_2 . На рис. 3.14 направление нормали n к границе S совпадает с направлением оси Z , а два из множества касательных к границе S направлений τ совпадают с направлениями осей X , Y . Расстояние между лежащими по разные стороны границы S точками "1", "2" на этом рисунке - бесконечно-мало ($L_{12} \rightarrow 0$).

Из физических соображений очевидно, что при решении прямых задач теории распространения упругих колебаний на границе S надо потребовать выполнения следующих 2-х условий.

1). Непрерывность поля смещений U , его декартовых компонент U , V , W или компонент поля U в других системах координат. В противном случае (в абсолютно-упругой среде) "возникнут", например, такие явления, как "трещины" на S , "внедрение" области V_1 в область V_2 , "проскальзывание" областей V_1 , V_2 по их границе S . Это означает (рис. 3.14), что

$$\text{на } S: \quad U_n^{(2)} = U_n^{(1)}, \quad U_\tau^{(2)} = U_\tau^{(1)}, \quad (3.44)$$

где U_n , U_τ - нормальная и касательная к границе S компоненты поля U в точках "1", "2".

2). По 3-му закону Ньютона - непрерывность нормальных (σ) и тангенциальных (τ) компонент упругих напряжений на границе S (см.

раздел 2.2). Согласно (2.22) - (2.24), эти напряжения можно выразить через упругие постоянные Ламэ λ , μ и производные декартовых компонент поля смещений по координатам:
 $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$, $\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y$, $\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z$;
 $\tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz}$, $\tau_{zx} = 2\mu\gamma_{zx}$, $\tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy}$.

Рассмотрим подробнее граничные условия для случая, когда граница S - плоскость $z=\text{const}$ декартовых координат, а поле смещений $\mathbf{U}=\mathbf{1}_x U(x,z)+\mathbf{1}_z W(x,z)$. Последнее равенство означает, что у поля \mathbf{U} y -компонента $V=0$, а ненулевые компоненты U , W не зависят от координаты y . При этих условиях граничные условия на плоскости S ($z=\text{const}$) принимают следующий вид. При $z=\text{const}$:

$$1). U^{(2)} = U^{(1)}, \quad W^{(2)} = W^{(1)}; \quad (3.45)$$

$$2). \left. \begin{aligned} \sigma_{z2} = \sigma_{z1} \quad \text{или} \quad \lambda_2\theta_2 + 2\mu_2\varepsilon_{z2} = \lambda_1\theta_1 + 2\mu_1\varepsilon_{z1}, \\ \tau_{zx2} = \tau_{zx1} \quad \text{или} \quad \mu_2\gamma_{zx2} = \mu_1\gamma_{zx1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Примем во внимание следующее. Согласно (2.12,a), дилатация $\theta=\text{div}\mathbf{U}=\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$. Если компонента $V=0$, то $\theta=\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}$.

Компонента деформации растяжения-сжатия $\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$. Компонента

деформации сдвига $\gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)$. Поэтому при $\mathbf{U}=\mathbf{1}_x U(x,z)+\mathbf{1}_z W(x,z)$

граничные условия (3.46) можем выразить через производные компонент поля смещений и упругие постоянные Ламэ. При $z=\text{const}$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} + (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial W_2}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial W_1}{\partial z}, \\ \mu_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) = \mu_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial W_1}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

3.14. Нормальное падение плоской гармонической продольной упругой волны на плоскую границу

Пусть в безграничной однородной упругой среде с параметрами λ_1 , μ_1 , ρ_1 распространяется по направлениюю оси Z (вертикально вниз) со скоростью $v_{P1}=v_1$ плоская продольная гармоническая упругая волна.

Скорость $v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$. Соответствующее этой волне поле смещений

обозначим: $\mathbf{U}^0=\mathbf{1}_z \cdot W^0(z,t)$. Знаем, что в соответствии с (3.17), решение уравнения струны для компоненты W^0 имеет вид $W^0=f(t-z/v_1)$, где f - любая функция аргумента $t-z/v_1$. Для гармонической волны при применении комплексной записи, в соответствии с изложенным в разделе

3.12, выражение для W^0 можем представить в виде: $W^0(z,t)=W^0(0,0)\exp[i\omega(t-z/v_1)]$, где $W^0(0,0)$ - компонента W^0 при $z=0$ и $t=0$.

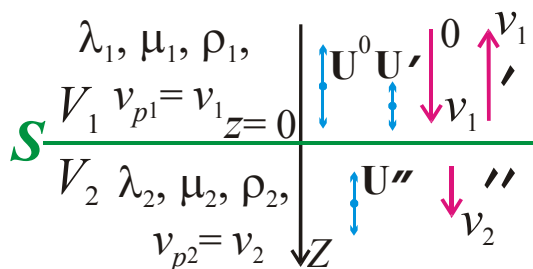


Рис. 3.15.

Нормальное падение плоской продольной упругой волны на плоскую границу

Пусть теперь модель среды отличается от безграничной однородной. Есть ортогональная оси Z граница - плоскость S , ниже которой параметры среды: λ_2, μ_2, ρ_2 (рис. 3.15). Тогда W^0 характеризует волну, падающую на границу S по направлению нормали Z к S . Будем полагать, что в плоскости S координата $z=0$.

Из физических условий понятно, что в присутствии границы S в верхнем полупространстве V_1 , кроме падающей волны, будет существовать отражённая гармоническая продольная волна, распространяющаяся в направлении, противоположном направлению оси Z со скоростью v_1 . Поле смещений этой волны обозначим: $U'=1_z \cdot W'(z,t)$. В нижнем полупространстве V_2 по направлению оси Z будет распространяться со скоростью $v_{p2}=v_2$ "проходящая" (границу

S) гармоническая продольная волна. Её скорость $v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}}$. Поле

смещений этой волны обозначим: $U''=1_z \cdot W''(z,t)$. Определим поля смещений $U_1=1_z \cdot W_1=1_z \cdot (W^0+W')$, $U_2=1_z \cdot W_2=1_z \cdot W''$ в полупространствах V_1, V_2 , полагая, что поле падающей волны $U^0=1_z \cdot W^0(z,t)=1_z \cdot W^0(0,0)\exp[i\omega(t-z/v_1)]$ - задано (известно).

При учёте сказанного в разделе 3.12 будем искать выражения для W_1, W_2 в следующем виде. В полупространстве V_1 :

$$W_1=W^0+W'=W^0(0,0) \cdot \{ \exp[i\omega(t-z/v_1)] + A_p \cdot \exp[i\omega(t+z/v_1)] \}. \quad (3.48)$$

В полупространстве V_2 :

$$W_2=W''=B_p \cdot W^0(0,0) \exp[i\omega(t-z/v_2)]. \quad (3.49)$$

На границе S (при $z=0$) для компоненты поля отражённой волны получаем: $W'(0,t)=A_p \cdot W^0(0,t)$, а для проходящей волны- $W''(0,t)=B_p \cdot W^0(0,t)$. Это означает, что A_p - коэффициент отражения, а B_p - коэффициент "прохождения" плоской продольной (P) волны при её нормальном падении на плоскость S .

Задание. Получить выражения для коэффициентов A_p, B_p .

Решение. Из выражений (3.48), (3.49) и граничных условий (3.45) - (3.47) получаем систему двух уравнений, решение которой позволяет определить коэффициенты A_p, B_p :

$$\text{при } z=0: \quad (a) W_2 = W_1, \quad (б) (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial W_2}{\partial z} = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial W_1}{\partial z}. \quad (3.50)$$

Так как во втором из этих уравнений - производные по пространственной координате z и (не зависящей от времени t и круговой частоты ω) (не зависящий от z) множитель $\exp(i\omega t)$ содержат все члены этих уравнений,

то можем разделить все члены равенств (3.50) на $\exp(i\omega t)$ и получить уравнения вида (3.50) для не зависящих от времени t величин. Тогда (в соответствии с выражениями (3.48), (3.48)) для W_1, W_2 получаем при $z=0$ систему двух алгебраических уравнений: при $z=0$:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad B_p &= 1 + A_p \\ (б) \quad -B_p \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)}{v_2} &= (-1 + A_p) \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)}{v_1} \end{aligned} \right\}. \quad (3.51)$$

Учтём, что, согласно (3.10), для продольной волны отношение $\frac{(\lambda + 2\mu)}{v} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{v_p} = \frac{(\lambda + 2\mu)\sqrt{\rho}}{\sqrt{(\lambda + 2\mu)}} = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \cdot \rho = v_p \cdot \rho = Z_p$, где $Z_p = v_p \cdot \rho$ -

акустическая жёсткость для p -волн.

При приведенном выше определении параметра "акустическая жёсткость" Z_p из системы уравнений (3.51) получаем следующие выражения для коэффициента отражения A_p и коэффициента прохождения B_p :

$$A_p = \frac{Z_{p1} - Z_{p2}}{Z_{p1} + Z_{p2}}, \quad B_p = 1 + A_p = \frac{2Z_{p1}}{Z_{p1} + Z_{p2}}. \quad (3.52)$$

Так как $A_p = \frac{Z_{p1} - Z_{p2}}{Z_{p1} + Z_{p2}} = \frac{Z_{p1}/Z_{p2} - 1}{Z_{p1}/Z_{p2} + 1}$, а $B_p = 1 + A_p$, то коэффициент

отражения A_p и коэффициент прохождения B_p при нормальном падении плоской продольной волны на плоскость S зависят только от отношения Z_{p1}/Z_{p2} акустических жёсткостей Z_{p1}, Z_{p2} граничащих упругих сред.

В соответствии с (3.52) коэффициент отражения $A_p > 0$ при $Z_{p1} > Z_{p2}$ и этот коэффициент $A_p < 0$ при $Z_{p1} < Z_{p2}$. Что это означает? Как различаются фазы компонент $W^0(0,t)$, $W^1(0,t) = A_p \cdot W^0(0,t)$ и $W^2(0,t) = B_p \cdot W^0(0,t)$?

Пример. Определить коэффициенты A_p, B_p при следующих значениях параметров $v_{p1}, v_{p2}, \rho_1, \rho_2$.

1). $v_{p1} = 1$ км/с, $v_{p2} = 2$ км/с, $\rho_1 = 2$ г/см³, $\rho_2 = 2.5$ г/см³.

2). $v_{p1} = 3$ км/с, $v_{p2} = 2$ км/с, $\rho_1 = 3$ г/см³, $\rho_2 = 2.5$ г/см³.

Ответы. 1) $A_p = \dots, B_p = \dots$, 2) $A_p = \dots, B_p = \dots$.

3.15. Нормальное падение плоской гармонической линейно поляризованной поперечной упругой волны на плоскую границу

В этом случае в безграничной однородной упругой среде с параметрами λ_1, μ_1, ρ_1 распространяется по направлениюю оси Z со скоростью $v_{s1} = v_1$ плоская линейно поляризованная поперечная гармоническая упругая волна. Выберем направления осей X, Y так, чтобы u -компонента V поля U была равна нулю. Тогда для такой волны поле смещений $U^0 = \mathbf{1}_x \cdot U^0(z,t)$. В соответствии с (3.18), (3.23) решение уравнения струны для компоненты U^0 имеет вид $U^0 = f(t - z/v_1)$, где f - функция аргумента $t - z/v_1$. Для гармонической волны при применении

комплексной записи выражение для U^0 можем представить в виде: $U^0(z,t)=U^0(0,0)\exp[i\omega(t-z/v_1)]$, где $U^0(0,0)$ - x -компонента U^0 поля U^0 при $z=0$ и $t=0$.

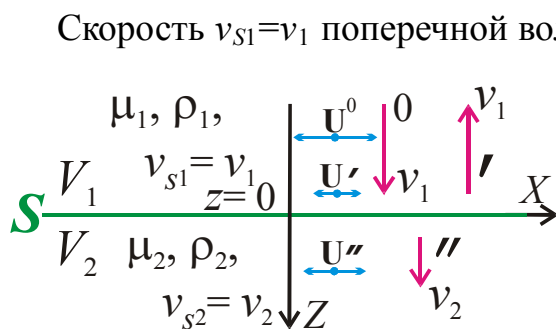


Рис. 3.16.

Нормальное падение плоской поперечной линейно поляризованной упругой волны на плоскую границу

Скорость $v_{S1}=v_1$ поперечной волны в упругой среде с параметрами μ_1, ρ_1 определяет выражение (3.13). В полупространстве V_1 (рис. 3.16) $v_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$. Соответствующее этой волне поле смещений обозначим: $U^0=\mathbf{1}_x \cdot U^0(z,t)$. Знаем, что решение уравнения струны для компоненты U^0 имеет вид $U^0=f(t-z/v_1)$, где f - любая функция аргумента $t-z/v_1$. Для гармонической волны при применении комплексной записи выражение для U^0 можем

представить в виде: $U^0(z,t)=U^0(0,0)\cdot\exp[i\omega(t-z/v_1)]$, где $U^0(0,0)$ - компонента U^0 при $z=0$ и $t=0$.

Пусть теперь модель среды отличается от безграничной однородной. Есть ортогональная оси Z граница - плоскость S , ниже которой параметры среды: μ_2, ρ_2 (рис. 3.16). Тогда поле U^0 характеризует волну, падающую на границу S по направлению нормали Z к S . Выберем $z=0$ в плоскости S .

Как и в предыдущем примере, в полупространстве V_1 кроме падающей волны, будет существовать отражённая гармоническая поперечная волна, распространяющаяся в направлении, противоположном направлению оси Z со скоростью v_1 . Поле смещений этой волны обозначим: $U'=\mathbf{1}_z \cdot U'(z,t)$. В нижнем полупространстве V_2 по направлению оси Z будет распространяться со скоростью $v_{S2}=v_2$ "проходящая" (границу S) гармоническая поперечная волна. Её скорость $v_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$. Поле смещений этой волны обозначим: $U''=\mathbf{1}_z \cdot U''(z,t)$. Определим поля смещений $U_1=\mathbf{1}_z \cdot U_1, U_2=\mathbf{1}_z \cdot U_2$ в полупространствах V_1, V_2 , полагая, что поле падающей волны $U^0=\mathbf{1}_z \cdot U^0(z,t)=\mathbf{1}_z \cdot U^0(0,0)\exp[i\omega(t-z/v_1)]$ - задано. При учёте сказанного выше будем искать выражения для U_1, U_2 в следующем виде. В полупространстве V_1 :

$$U_1=U^0+U'=U^0(0,0)\cdot\{\exp[i\omega(t-z/v_1)]+A_S\cdot\exp[i\omega(t+z/v_1)]\}. \quad (3.53)$$

В полупространстве V_2 :

$$U_2=U''=B_S\cdot U^0(0,0)\cdot\exp[i\omega(t-z/v_2)]. \quad (3.54)$$

На границе S (при $z=0$) для компоненты поля отражённой волны получаем: $U'(0,t)=A_S\cdot U^0(0,t)$, а для проходящей волны - $U''(0,t)=B_S\cdot U^0(0,t)$. Это означает, что A_S - коэффициент отражения, а B_S - коэффициент "прохождения" плоской поперечной (S) волны при её нормальном падении на плоскость S .

Задание. Получить выражения для коэффициентов A_S, B_S .

Решение. Из выражений (3.53), (3.54) и граничных условий (3.45) - (3.47) получаем систему двух уравнений, решение которой позволяет определить коэффициенты A_S, B_S :

$$\text{при } z=0: \quad (a)U_2 = U_1, \quad (б)\mu_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial U_1}{\partial z}. \quad (3.55)$$

Из (3.53) - (3.55) после дифференцирования получаем для A_S, B_S систему двух алгебраических уравнений. Её решение:

$$A_S = \frac{Z_{S1} - Z_{S2}}{Z_{S1} + Z_{S2}}, \quad B_S = 1 + A_S = \frac{2Z_{S1}}{Z_{S1} + Z_{S2}}, \quad (3.56)$$

где $Z_{S1} = v_{S1} \cdot \rho_1, Z_{S2} = v_{S2} \cdot \rho_2$ - акустические жёсткости для S -волн.

3.16. Наклонное падение плоской гармонической продольной упругой волны на плоскую границу

Как и на 2-х предыдущих рисунках ортогональная плоскости рис. 3.17 плоскость S - граница 2-х однородных полупространств: V_1 (с параметрами λ_1, μ_1, ρ_1) и V_2 (с параметрами λ_2, μ_2, ρ_2). Из полупространства V_1 на границу S падает плоская продольная (P) гармоническая упругая волна, распространяющаяся в направлении l_{P0} . В декартовых координатах граница S - плоскость $z=0$ и, соответственно, ось Z направлена по нормали n к плоскости S . Ось X лежит в плоскости рис. 3.17 (или параллельна этой плоскости). По направлению l_{P0} ориентирован

единичный вектор $\mathbf{1}_{l_{P0}}$. Скорость этой волны $v_{P1} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}$. При

сделанном выборе направлений декартовых осей y - компонента (V) поля смещений падающей волны равна нулю и поле смещений плоской волны будет одинаковым в любой плоскости $y = \text{const}$. Угол между направлениями l_{P0} и нормали n (Z) к S обозначим α_0 .

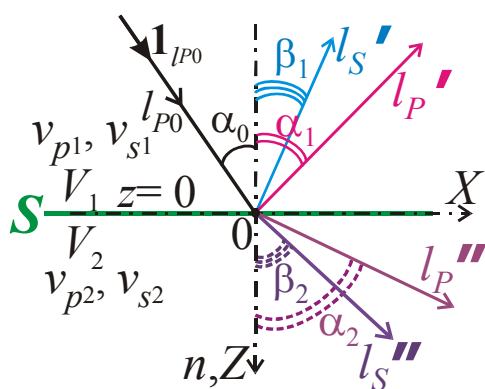


Рис. 3.17.

Наклонное падение плоской продольной упругой волны на плоскую границу S

Как было показано в разделе 3.12, при применении комплексной записи выражение для z -компоненты W^0 плоской гармонической продольной волны, распространяющейся по направлению оси Z , можем представить в виде:

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{1}_z \cdot W^0(z, t),$$

$W^0(z, t) = W^0(0, 0) \exp[i\omega(t - z/v_1)]$, где $W^0(0, 0)$ - компонента W^0 при $z=0$ и $t=0$. В рассматриваемом случае такая волна распространяется не по направлению оси Z , а по направлению l_{P0} или единичного вектора $\mathbf{1}_{l_{P0}}$ по направлению l_{P0} .

Тогда поле смещений падающей продольной гармонической волны можем представить в виде:

$$\mathbf{U}_{l_{P0}} = \mathbf{1}_{l_{P0}} \cdot U_{l_{P0}}, \quad U_{l_{P0}}(l_{P0}, t) = C \cdot \exp[i\omega(t - l_{P0}/v_{P1})],$$

где константа $C=U_{IP0}(0,0)$ - компонентна поля смещений по направлению l_{P0} при $t=0, l_{P0}=0$, если начало отсчёта вдоль линии l_{P0} выбрано при $l_{P0}=0$ (а также - при $z=0, x=0$). Тогда положение точки "наблюдения" можем выразить через координаты x, z и угол α_0 : $l_{P0}=x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0$ (см. рис. 3.18,a) и для поля поля смещений U_{IP0} падающей волны получаем:

$$U_{IP0} = \mathbf{1}_{IP0} \cdot U_{IP0}, \quad U_{IP0} = C \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right]. \quad (3.57)$$

Выразим поле U_{IP0} , как сумму декартовых компонент поля U_{IP0} : $U_{IP0} = \mathbf{1}_x \cdot U_{P0} + \mathbf{1}_z \cdot W_{P0}$. Так как $U_{P0} = U_{IP0} \cdot \sin \alpha_0$, а $W_{P0} = U_{IP0} \cdot \cos \alpha_0$ (рис. 3.18,a), то из (3.57) для x - компоненты и z - компоненты поля падающей на границу S плоской продольной волны получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_{P0} &= C \cdot \sin \alpha_0 \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right], \\ W_{P0} &= C \cdot \cos \alpha_0 \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0}{v_{P1}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Выражения (3.58) определяют компоненты поля смещений U_{IP0} в безграничной одноородной среде.

Из (3.57), в частности, следует, что уравнение $x \cdot \sin \alpha_0 + z \cdot \cos \alpha_0 = \text{const}$ определяет положение ортогональных направлению $\mathbf{1}_{IP0}$ синфазных плоскостей. Для волны с полем смещений U_{IP0} углы между такими синфазными плоскостями и границей S равны α_0 (см. рис. 3.19).

Теперь надо учесть влияние границы S (плоскости $z=0$) однородных областей V_1, V_2 на поле смещений в полупространствах V_1, V_2 . Известно, что в этом случае при наклонном падении продольной (P) волны на границу S в полупространстве V_1 , кроме падающей волны с полем смещений U_{IP0} , будут существовать две отражённые волны: продольная (по направлению $l_{P'}$ с полем смещения $U_{P'}$) и поперечная (по направлению $l_{S'}$ полем смещения $U_{S'}$). В полупространстве V_2 будут распространяться две проходящие волны: продольная (по направлению $l_{P''}$ с полем смещения $U_{P''}$) и поперечная (по направлению $l_{S''}$ с полем смещения $U_{S''}$). Если падающая волна - плоская гармоническая с круговой частотой ω , то отражённые и проходящие волны также будут плоскими, гармоническими с круговой частотой ω . В полупространстве V_1 суммарное поле вектора смещения $\mathbf{U}^{(1)} = U_{IP0} + U_{P'} + U_{S'}$, а в полупространстве V_2 $\mathbf{U}^{(2)} = U_{P''} + U_{S''}$.

("Острые") углы между направлением нормали n к S и направлениями векторов скоростей \mathbf{v} распространения волн (полей смещений) обозначим соответственно: для $U_{P'}$ - α_1 , для $U_{S'}$ - β_1 , для $U_{P''}$ - α_2 , для $U_{S''}$ - β_2 (см. рис. 3.17 - 3.19). Угол β_2 на рис. 3.19 не показан.

Так как круговые частоты ω и периоды $T=(2\pi/\omega)$ у всех пяти волн - одинаковы, то, например, для отражённой продольной P' -волны

распространяющейся по направлению lp' (рис. 3.18,б,) справедливо выражение:

$$\mathbf{U}'_P = \mathbf{1}_{lp'} \cdot U'_{lp'}, \quad U'_{lp'} = A_p(\alpha_0) \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{lp'}{v_{P1}}\right)\right] \quad \text{где} \quad A_p(\alpha_0) -$$

(зависящий от угла падения α_0) коэффициент отражения для продольной (P-P) отражённой волны. Поле $\mathbf{U}'_P = \mathbf{1}_x \cdot U'_P + \mathbf{1}_z \cdot W'_P$. Примем во внимание то, что перемещение $\Delta l_{P'}$ по направлению lp' связано с изменением координат Δx , Δz следующими равенствами (рис. 3.18,б):

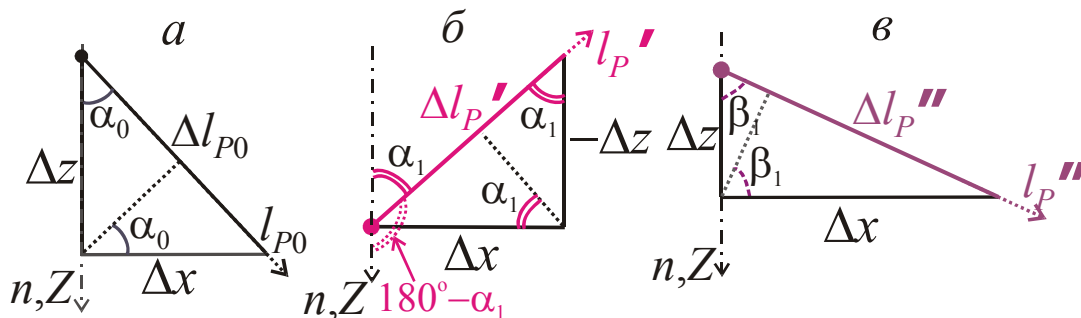


Рис. 3.18.

Иллюстрации к выражениям (3.58), (3.60), (3.61)

$\Delta l_{P'} = \Delta x \cdot \sin \alpha_1 - \Delta z \cdot \cos \alpha_1$. Поэтому для поля \mathbf{U}'_P получаем следующее выражение:

$$\mathbf{U}'_P = \mathbf{1}_{lp'} \cdot A_p(\alpha_0) \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_1 - z \cdot \cos \alpha_1}{v_{P1}}\right)\right]. \quad (3.59)$$

Чтобы получить выражения для декартовых компонент этого поля примем во внимание, что x - компонента $U'_P = |\mathbf{U}'_P| \cdot \sin \alpha_1$, z - компонента $W'_P = -|\mathbf{U}'_P| \cdot \cos \alpha_1$. Поэтому для этих компонент справедливы выражения:

$$\left. \begin{aligned} U'_P &= A_p(\alpha_0) \cdot \sin \alpha_1 \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_1 - z \cdot \cos \alpha_1}{v_{P1}}\right)\right], \\ W'_P &= -A_p(\alpha_0) \cdot \cos \alpha_1 \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_1 - z \cdot \cos \alpha_1}{v_{P1}}\right)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Аналогичные выражения можно получить для декартовых компонент U'_S , W'_S отражённой поперечной (P-S) волны. Эти выражения содержат множитель $A_S(\alpha_0)$ - зависящий от угла падения α_0 коэффициент отражения для P-S волны. После этого не сложно получить выражения для двух ненулевых декартовых компонент U и W поля смещений в ("верхнем") полупространстве V_1 : $U_1 = U_{P0} + U'_P + U'_S$, $W_1 = W_{P0} + W'_P + W'_S$.

В "нижнем" полупространстве V_2 поле смещений \mathbf{U}_2 - сумма проходящих продольной а поперечной волн: $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_P'' + \mathbf{U}_S'' = \mathbf{1}_x (U_P'' + U_S'') + \mathbf{1}_z (W_P'' + W_S'')$, где поле проходящей продольной (P - P) волны пропорционально коэффициенту прохождения B_P , а поле проходящей поперечной (P - S) волны пропорционально коэффициенту прохождения B_S . Выражение для поля смещений \mathbf{U}_P'' проходящей продольной (P - P) волны в полупространстве V_2 можем представить в виде: $\mathbf{U}_P'' = \mathbf{1}_{P''} \cdot B_P(\alpha_0) \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{l_{P''}}{v_{P2}}\right)\right]$, где $B_P(\alpha_0)$ - коэффициент прохождения для P - P волны. а его x - компоненту U_P'' и z - компоненту W_P'' определяют выражения (см. рис. 3.17,*a*, 3.17,*z*):

$$\left. \begin{aligned} U_P'' &= B_P(\alpha_0) \cdot \sin \alpha_2 \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_2 + z \cdot \cos \alpha_2}{v_{P2}}\right)\right], \\ W_P'' &= B_P(\alpha_0) \cdot \cos \alpha_2 \cdot C \cdot \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x \cdot \sin \alpha_2 + z \cdot \cos \alpha_2}{v_{P2}}\right)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Пользуясь не очень сложными геометрическими соотношениями, подобные (3.61) выражения можем получить для x - компоненты U_S'' и z - компоненты W_S'' поля смещений \mathbf{U}_S'' поперечной волны "нижнем" полупространстве V_2 . Выражения для проходящих волн содержат множители $B_P(\alpha_0)$, $B_S(\alpha_0)$ - коэффициенты прохождения для P и S волн.

Из 4-х граничных условий (непрерывность поля смещений и упругих напряжений) на границе S ($z=0$) получаем систему 4-х уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \text{При } z = 0: \quad & \text{а) } U^{(2)} = U^{(1)}, \quad \text{б) } W^{(2)} = W^{(1)}, \\ & \text{в) } \lambda_2 \operatorname{div} \mathbf{U}^{(2)} + 2\mu_2 \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z} = \lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{U}^{(1)} + 2\mu_1 \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}, \\ & \text{г) } \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} \right) = \mu_1 \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

где $\operatorname{div} \mathbf{U}^{(1,2)} = \frac{\partial U^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\partial W^{(1,2)}}{\partial z}$.

Но в выражениях вида (3.59) - (3.61) неизвестных величин не 4, а 8: ($A_p, B_p, A_s, B_s, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$). Для определения всех неизвестных нужны ещё 4 уравнения- какие?

На рис. 3.19 пунктирными линиями показано пересечение плоскостью рисунка пар синфазных поверхностей нескольких волн при различии фаз этих волн на 2π . То есть расстояние между двумя синфазными поверхностями (для каждой из волн) равно длине соответствующей волны Λ . На этом же рисунке (в плоскости рисунка) показаны точки на границе S , в которых пары таких синфазных поверхностей пересекают эту границу. Расстояние между этими точками - кажущаяся длина волны Λ_k на границе S . Если в фиксированный момент времени t на границе S компоненты поля падающей волны равны нулю ($U_{P0}=0, W_{P0}=0$), то в этот же момент времени на S равны нулю также компоненты отражённых и проходящих волн ($U_{P'}=0, W_{P'}=0, U_{P''}=0, W_{P''}=0, U_{S'}=0, W_{S'}=0, U_{S''}=0, W_{S''}=0$). Это обусловлено тем, что в этот момент времени, в этих точках падающая волна не возбуждает на S отражённые и проходящие волны. То есть на плоскости S кажущаяся длина волны Λ_k должна быть одинаковой для всех волн. Как видно на рис. 3.19, это означает, что

$$\Lambda_k = \frac{\Lambda_P^0}{\sin \alpha_0} = \frac{\Lambda_{P'}}{\sin \alpha_1} = \frac{\Lambda_{S'}}{\sin \beta_1} = \frac{\Lambda_{P''}}{\sin \alpha_2} = \frac{\Lambda_{S''}}{\sin \beta_2}. \quad (3.63)$$

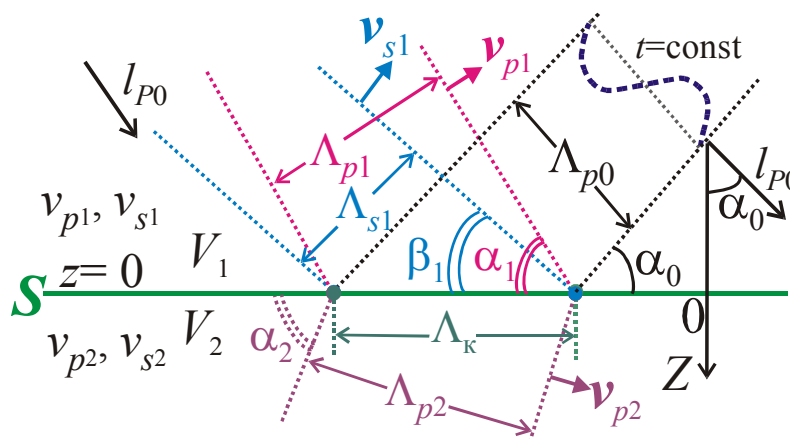


Рис. 3.19.

К обобщённому закону Снеллиуса

Примем во внимание, что скорость $v = \Lambda \cdot f = \omega \cdot \Lambda / (2\pi)$, где $2\pi f = \omega$ - групповая частота. Отсюда следует, что $\Lambda = v/f = 2\pi v/\omega$. Так как в рассматриваемом случае частоты всех волн одинаковы, то длина каждой волны пропорциональна её скорости и из (3.63) получаем *обобщённый закон Снеллиуса*:

$$\frac{\sin \alpha_0}{v_{P1}} = \frac{\sin \alpha_1}{v_{P1}} = \frac{\sin \beta_1}{v_{S1}} = \frac{\sin \alpha_2}{v_{P2}} = \frac{\sin \beta_2}{v_{S2}}. \quad (3.64)$$

На основе 4-х уравнений (3.62) и 4-х равенств (3.64) можем определить восемь неизвестных ($A_p(\alpha_0), B_p(\alpha_0), A_s(\alpha_0), B_s(\alpha_0), \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$) в выражениях вида (3.60), (3.61).

Итак, наклонно падающая на плоскую границу S (при остром угле α_0) продольная (P) упругая волна возбуждает две отражённые волны (P - P и P -

S) и две проходящие волны (P - P и P - S). P - S волны называют обменными. Аналогичным образом при наклонном падении S волны на границу "возникают" две S - S волны и две обменные S - P волны

Из (3.64) не сложно выразить углы $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ при известных угле α_0 и скоростях $v_{P1}, v_{S1}, v_{P2}, v_{S2}$. Из этого выражения получаем, в частности, следующее.

1). Для отражённой P - P волны $\alpha_1 = \alpha_0$ (угол отражения равен углу падения).

2). Так как $v_{S1} < v_{P1}$ и $v_{S2} < v_{P2}$, то $\beta_1 < \alpha_1, \beta_2 < \alpha_2$.

3). Согласно (3.64), $\frac{\sin \alpha_0}{v_{P1}} = \frac{\sin \alpha_2}{v_{P2}}$, то есть $\sin \alpha_2 = \frac{v_{P2}}{v_{P1}} \sin \alpha_0$. Если

$v_{P2} > v_{P1}$ и $\frac{v_{P2}}{v_{P1}} \sin \alpha_0 = 1$, то $\sin \alpha_2 = 1$ и $\alpha_2 = 90^\circ$. Это означает, что при

$v_{P2} > v_{P1}$ и падении продольной волны из области V_1 на границу S под критическим углом α_0 - таким, что $\sin \alpha_0 = \frac{v_{P1}}{v_{P2}}$, в области V_2 вдоль этой

границы будет распространяться со скоростью v_{P2} (P - P) волна. В сейсморазведке такую волну называют *преломлённой*. Распространяясь в области V_2 вдоль границы эта волна возбуждает в V_1 "головные" волны. На этом основан метод преломленных волн в сейсморазведке.

3.17. Плоская неоднородная волна

У рассмотренных в предыдущих 3-х примерах P и S плоских гармонических упругих волн в фиксированный момент времени смещения (их амплитуды и фазы) - одинаковы в пределах произвольной плоскости, ортогональной направлению распространения волны. Это - плоские однородные волны. Но есть и другие плоские волны, называемые неоднородными. Определим это понятие.

Пусть, например, плоская продольная (P) упругая волна распространяется в однородной среде со скоростью v_P в направлении прямой l . По аналогии с (3.19), (3.21), поле смещений $\mathbf{U} = \mathbf{U}_P = \mathbf{1}_l \cdot f(t - l/v_P)$, где l - координата, отсчитываемая по направлению прямой l от начала 0 декартовых координат x, y, z , а f - функция аргумента $t - l/v_P$. Тогда координата $l = n_x x + n_y y + n_z z$, а поле

смещений
$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_l \cdot f\left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{v_P}\right), \quad \text{где} \quad n_x = \cos(l, X),$$

$n_y = \cos(l, Y), n_z = \cos(l, Z)$ - направляющие косинусы прямой линии l (направления распространения волны). Для направляющих косинусов, как известно, справедливо равенство:

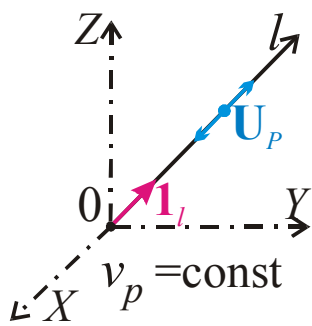


Рис. 3.20.
К плоской
неоднородной P -
волне

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (3.65)$$

При выполнении условия (3.65) приведенное выше выражения для поля смещений \mathbf{U} будет решением волнового уравнения (3.11).

Пусть поле \mathbf{U} - гармонически меняющееся. Тогда (при применении комплексной формы записи) имеем:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_l U_0 \exp[i\omega(t - l/v_p)] = \mathbf{1}_l U_0 \exp[i(\omega t - kl)],$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, U_0 - амплитуда колебаний, а $k = k_p = \omega/v_p$ - волновое число.

Выражая l через x, y, z , получаем:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_l U_0 \exp\{i[\omega t - k(n_x x + n_y y + n_z z)]\}. \quad (3.66)$$

Выражение (3.66) является решением уравнения Гельмгольца (3.40) при выполнении равенства (3.65).

Введём теперь понятие плоской неоднородной волны, приняв формальное допущение о том, что равенство (3.65) и выражение (3.66) остаются справедливым, но величины n_x, n_y, n_z - комплексные: $n_x = n_x' + in_x'', n_y = n_y' + in_y'', n_z = n_z' + in_z''$, где i - мнимая единица, а $n_x', n_y', n_z', n_x'', n_y'', n_z''$ - действительные величины. Тогда из (3.66) для поля смещений получаем:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_l U_0 \exp\{i[\omega t - k(n_x' x + n_y' y + n_z' z)]\} \exp[k(n_x'' x + n_y'' y + n_z'' z)].$$

Переходя к действительной форме записи, в соответствии с формулой Эйлера (3.26) получаем:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_l U_0 \exp[k(n_x'' x + n_y'' y + n_z'' z)] \cos[\omega t - k(n_x' x + n_y' y + n_z' z)]. \quad (3.67)$$

Выражение (3.67) описывает гармоническую волну, распространяющуюся со временем t в направлении прямой l' с направляющими косинусами n_x', n_y', n_z' . Но амплитуда колебаний такой волны экспоненциально возрастает (так как $k > 0$) в направлении l'' с направляющими косинусами n_x'', n_y'', n_z'' и экспоненциально убывает в направлении, противоположном направлению l'' . Выясним теперь то, какую взаимную ориентацию имеют направления l' и l'' .

Из (3.65) следует, что $(n_x' + in_x'')^2 + (n_y' + in_y'')^2 + (n_z' + in_z'')^2 = 1$, то есть

$$(n_x'^2 - n_x''^2 + n_y'^2 - n_y''^2 + n_z'^2 - n_z''^2) + i \cdot 2 \cdot (n_x' \cdot n_x'' + n_y' \cdot n_y'' + n_z' \cdot n_z'') = 1 + i \cdot 0.$$

Из равенства 2-х комплексных чисел (величин) следует то, что одинаковы их действительные части и одинаковы их мнимые части. Из последнего следует, что $(n_x' \cdot n_x'' + n_y' \cdot n_y'' + n_z' \cdot n_z'') = 0$.

Известно, что это равенство означает, следующее. Направление прямой линии l' (с направляющими косинусами n_x' , n_y' , n_z' в декартовых координатах) и направление прямой линии l'' (с направляющими косинусами n_x'' , n_y'' , n_z'') - взаимно-ортогональны: $l'' \perp l'$. То есть направление l' распространения со скоростью $v_p = \omega/k$ такой плоской неоднородной волны и направление $-l''$ (противоположное направлению l''), в котором экспоненциально затухает амплитуда колебаний, взаимно ортогональны.

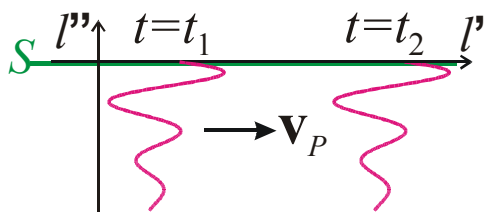


Рис. 3.21.

Распространение плоской неоднородной волны

Формально полученное решение (3.67) уравнения Гельмгольца (3.40) отражает некоторые особенности реально существующих упругих волн. Это, например, скользящая вдоль плоской границы S преломлённая волна на большом расстоянии от источника волн. Такая упругая волна распространяется вдоль границы S по

направлению l' , а амплитуда колебаний экспоненциально убывает с удалением от границы S в ортогональном этой границе направлении, противоположном направлению l'' (рис. 3.21).

3.18. Уравнения и граничные условия для потенциалов поля смещений

Как было показано в разделе 2.6, поле смещений U можно представить в виде суммы: $U=U_p+U_s$. Для первого слагаемого справедливо уравнение: $\text{rot } U_p \equiv 0$ и эту (потенциальную) составляющую поля смещений можно выразить через скалярный потенциал Φ : $U_p=\text{grad } \Phi$. Для второго слагаемого в выражении для U имеем: $\text{div } U_s \equiv 0$. Эту (чисто-вихревую) составляющую поля смещений можно выразить через векторный потенциал Ψ : $U_s=\text{rot } \Psi$. Тогда

$$U = U_p + U_s = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi \quad (3.68)$$

В декартовых координатах имеем: $U=U_p+U_s=1_x U+1_y V+1_z W$. Декартовы компоненты поля смещений можем выразить через производные скалярного потенциала Φ и производные декартовых компонент векторного потенциала Ψ по декартовым координатам. В соответствии с (3.68) выражения для декартовых компонент поля U :

$$U=\text{grad}_x \Phi+\text{rot}_x \Psi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Psi_z}{\partial y}-\frac{\partial \Psi_y}{\partial z}, \quad V=\text{grad}_y \Phi+\text{rot}_y \Psi=\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Psi_x}{\partial z}-\frac{\partial \Psi_z}{\partial x},$$

$$W=\text{grad}_z \Phi+\text{rot}_z \Psi=\frac{\partial \Phi}{\partial z}+\frac{\partial \Psi_y}{\partial x}-\frac{\partial \Psi_x}{\partial y}.$$

В однородной упругой среде (со скоростями v_p , v_s соответственно P и S упругих волн) потенциалы Φ , Ψ , согласно (3.12), (3.15), удовлетворяют

волновым уравнениям: $\nabla^2\Phi = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$, $\nabla^2\Psi = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$. Если поля

смещений (и их потенциалы) - гармонически меняющиеся и мы применяем для них комплексную форму записи, то (в однородной области упругой среды) для потенциалов Φ , Ψ справедливы уравнения Гельмгольца: $\nabla^2\Phi + k_p^2\Phi = 0$, $\nabla^2\Psi + k_s^2\Psi = 0$. Волновые числа $k_p = \omega/v_p$, $k_s = \omega/v_s$. Для статических полей смещений ($\partial\Phi/\partial t \equiv 0$, $\partial\Psi/\partial t \equiv 0$) и для потенциалов Φ , Ψ (как и для полей U_p , U_s) справедливы уравнения Лапласа: $\nabla^2\Phi = 0$, $\nabla^2\Psi = 0$.

Пусть теперь S - граница двух однородных по упругим параметрам λ , μ и плотности ρ сред с нормалью n к S и точками "1", "2", расположенными по разные стороны поверхности S , а расстояние между этими точками $L_{12} \rightarrow 0$. В разделе 3.13 (см. рис. 3.14) были приведены граничные условия, которым должно удовлетворять поле смещений U . Эти условия: 1) непрерывность на S компонент поля U и 2) следующая из 3-го закона Ньютона непрерывность на S нормальной к S (σ_n) и тангенциальных (τ_{ij}) компонент упругих напряжений. Выразим граничные условия через потенциалы Φ , Ψ .

Если, например, граница S - плоскость $z = \text{const}$ в декартовых координатах, то в граничных условиях (3.45) - (3.47) для компонент поля смещений $U = \mathbf{1}_x U + \mathbf{1}_z W$, то в соответствии с (1.8), (1.15), (2.12,б), (2.12,в), (3.68) получаем:

$$U^{(1,2)} = \frac{\partial\Phi^{(1,2)}}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_y^{(1,2)}}{\partial z}, \quad V^{(1,2)} = \frac{\partial\Psi_x^{(1,2)}}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z^{(1,2)}}{\partial x},$$

$$W^{(1,2)} = \frac{\partial\Phi^{(1,2)}}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y^{(1,2)}}{\partial x}. \quad (3.69)$$

В более общем случае, при $U = \mathbf{1}_x U + \mathbf{1}_y V + \mathbf{1}_z W$, компоненты U , V , W поля смещений U можно выразить через потенциалы Φ , Ψ следующим образом:

$$U = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z}, \quad V = \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x},$$

$$W = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y}. \quad (3.70)$$

3.19. Пример расчёта сферически-симметричного статического поля смещений

Рассмотрим сначала пример, когда поле вектора смещения U - сферически-симметричное и это поле - статическое, то есть оно не меняется со временем t .

На рис. 3.22 показана сферическая поверхность $S_{сф}$ с центром в начале 0 сферических координат. Эта поверхность - граница двух однородных по λ, μ, ρ областей пространства: локальной области V_0 в форме шара с радиусом R_0 и неограниченной "снаружи" области V , в которой сферическая координата R может меняться в пределах от радиуса R_0 поверхности $S_{сф}$ до бесконечности. К границе $S_{сф}$ областей V_0 и V "изнутри" (из области V_0) по нормали к этой границе приложено статическое давление $\mathbf{P}=\mathbf{1}_R \cdot P_R=\mathbf{1}_R \cdot P_0$. Компонента $P_R=P_0$ одинакова во всех точках поверхности $S_{сф}$.

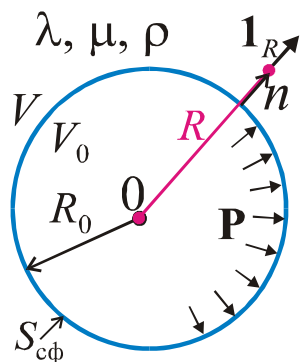


Рис. 3.22.
К примерам расчёта сферически-симметричного поля смещений

При указанных условиях во внешней области V поля вектора смещения \mathbf{U} и скалярного потенциала Φ поля \mathbf{U} - сферически-симметричны и не зависят от времени t . То есть $\frac{\partial \Phi(R)}{\partial t} = 0$ и в V для ненулевой компоненты U_R поля $\mathbf{U}=\mathbf{1}_R \cdot U_R(R)$ получаем выражение: $U_R = \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R} = \frac{d\Phi(R)}{dR}$.

1). В этом случае в области пространства V из волнового уравнения (3.12) $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ для скалярного потенциала Φ в случае статического поля смещений получаем уравнение

$$\nabla^2 \Phi(R) = 0, \tag{3.71}$$

а при $\Phi=\Phi(R)$ в сферической системе координат - уравнение

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Phi}{dR} \right) = 0. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Phi}{dR} \right) = 0. \tag{3.71, a}$$

Последнее (обыкновенное дифференциальное 2-го порядка) уравнение для потенциала Φ имеет бесчисленное множество частных решений. Для получения единственного (и правильного) решения задачи это уравнение для области V надо дополнить это уравнение краевыми условиями. Учтём, что при $R \rightarrow \infty$ компонента $U_R \rightarrow 0$ и потенциал $\Phi \rightarrow 0$.

$$\text{При } R \rightarrow \infty \quad \Phi \rightarrow 0. \tag{3.72}$$

На поверхности $S_{сф}$ (при $R=R_0$), в соответствии с 3-им законом Ньютона и правилом выбора знаков скалярных компонент упругих напряжений (2.1), должно быть выполнено следующее краевое условие. $\sigma_R = -P_0$. Для декартовых компонент нормальных напряжений были получены выражения (2.23). Аналогичное равенство справедливо для нормального напряжения σ_R , то есть

$$\sigma_R = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_R = \lambda \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_R}{\partial R} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}. \quad \text{Принимая во}$$

внимание, что, согласно (3.71), потенциал Φ статического поля смещений удовлетворяет уравнению Лапласа, получаем следующее граничное условие для Φ :

$$\text{При } R = R_0 \quad 2\mu \frac{dU_R}{dR} = 2\mu \frac{d^2\Phi}{dR^2} = -P_0. \quad (3.73)$$

Согласно (3.71,a), в области пространства V ($R > R_0$) производная $\frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\Phi}{dR} \right) = 0$. Это означает, что произведение $R^2 \frac{d\Phi}{dR} = C = \text{const}$ (то есть постоянная C не зависит от R). Умножая левую и правую части это равенства на отношение dR/R^2 , получаем: $d\Phi = C \frac{dR}{R^2}$. Первообразные (неопределённые интегралы) от левой и правой частей этого уравнения равны с точностью до постоянного слагаемого C_1 : $\int d\Phi = C \int \frac{dR}{R^2} + C_1$, то есть

$$\Phi = -\frac{C}{R} + C_1. \quad (3.74).$$

Для определения констант C , C_1 воспользуемся краевыми условиями (3.72), (3.73). Согласно (3.72), $C_1 = 0$ и $\Phi = -\frac{C}{R}$, а из (3.73) получаем уравнение для определения C : при $R = R_0$

$$P_0 = 2C\mu \frac{d^2\Phi}{dR^2} \frac{1}{R} = -2C\mu \frac{d\Phi}{dR} \frac{1}{R^2} = 4C\mu \frac{1}{R^3}.$$

Отсюда следует, что коэффициент $C = \frac{P_0 R_0^3}{4\mu}$ и из (3.74) получаем следующее выражение для потенциала Φ поля смещений

$$\Phi = -\frac{P_0 R_0^3}{4\mu R}. \quad (3.74,a)$$

Из последнего выражения для ненулевой компоненты U_R поля смещений $\mathbf{U} = \mathbf{1}_R \cdot U_R = \mathbf{1}_R \cdot \frac{d\Phi}{dR}$ получаем:

$$U_R = \frac{P_0 R_0^3}{4\mu R^2}, \quad (3.75)$$

то есть в рассматриваемом случае поле смещений зависит от модуля сдвига μ , давления P_0 , радиуса R_0 поверхности $S_{\text{сф}}$ и расстояния R от центра этой поверхности.

Пример. Определить ненулевую компоненту U_R сферически-симметричного поля смещений \mathbf{U} при давлении $P_0 = 10^4$ Н/см², радиусе $R_0 = 1$ м = 10^2 см, модуле Юнга $E = 10^7$ Н/см², коэффициенте Пуассона $\nu = 0.25$, и расстоянии $R = 2$ м = $2 \cdot 10^2$ см.

Ответ. Согласно (2.22) модуль сдвига $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{10^7}{2.5} \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$. Подставляя это значение μ , а также приведенные значения для R_0, R, P_0 в выражение (3.75) получаем $U_R = \frac{2.5}{160} \text{ см} \approx 0.16 \text{ мм}$.

3.20. Сферический источник ("очаг") продольных упругих волн

В учебнике по курсу "Сейсморазведка" [Гурвич, 1970] рассмотрен возбудитель упругих колебаний в виде сферического источника продольных упругих волн. В некоторый момент времени t_0 к сферической поверхности $S_{\text{сф}}$ с радиусом $R=R_0$ "приложено" зависящее от времени t давление $\mathbf{P}=\mathbf{1}_R \cdot P_R(t)$. Ненулевая компонента P_R давления \mathbf{P} , одинакова во всех точках поверхности $S_{\text{сф}}$. В этом случае, как и в предыдущем примере (при соответствующем выборе сферических координат), переменные поля вектора смещения \mathbf{U} и потенциала Φ сферически симметричны:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_R U_R(R, t), \quad U_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad \Phi = \Phi(R, t). \quad (3.76)$$

В (3.76) принято во внимание, что при $\mathbf{U}=\mathbf{1}_R \cdot U_R(R, t)$ имеем $\text{rot } \mathbf{U}=0$, $\mathbf{U}=\mathbf{U}_p=\text{grad } \Phi$. То есть такому переменному полю смещений \mathbf{U} отвечает продольная упругая волна, распространяющаяся в направлении $\mathbf{1}_R$ со скоростью v_p . Надо будет определить потенциал Φ и ненулевую компоненту U_R поля смещений \mathbf{U} при заданной зависимости $P_R(t)$ на поверхности $S_{\text{сф}}$. При решении задачи рассмотрим два вида зависимости $P_R(t)$.

(А) $P_R(t)=P_0 \cdot \delta(t)$, где $P_0=\text{const}$, а $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака. Согласно (3.38,б), спектральная характеристика этой функции равна единице. Такой зависимости $P_R(t)$ соответствует модель "взрывного очага" (источника) продольных упругих волн. В этом случае радиусу R_0 сферической поверхности $S_{\text{сф}}$ можно "придать" следующий смысл. При $R>R_0$ деформации должны быть достаточно малыми и упругими. Поэтому, чем больше мощность взрыва, тем больше радиус R_0 .

(Б) $P_R(t)=P_0 \cdot \exp(i\omega t)$, что соответствует гармонически меняющемуся с частотой $f=\omega/(2\pi)$ давлению $\mathbf{P}=\mathbf{1}_R \cdot P_R(t)$ на поверхности $S_{\text{сф}}$. Тогда поля \mathbf{U} , Φ тоже будут гармонически меняющимися с круговой частотой ω . Определев гармонически меняющееся поле смещений, сможем перейти к модели взрывного очага, пользуясь интегралом Фурье (3.34).

(А) Итак, пусть при $R=R_0$ ненулевая компонента давления $P_R(t)=P_0 \cdot \delta(t)$. Поставим краевую задачу для потенциала Φ в области V .

В области V (см. рис. 3.22) в соответствии с (3.12) $\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$, а при условии (3.76), то есть при $\Phi = \Phi(R, t)$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + 2R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \text{ Отсюда следует, что в}$$

области V потенциал Φ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (3.77)$$

Краевое условие на бесконечности - очевидно.

$$\text{При } R \rightarrow \infty \quad \Phi \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

Краевое условие на границе $S_{сф}$ области V можем получить тем же способом, что и в разделе 3.19. $-P_R = \sigma_R = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_R =$

$$= \lambda \operatorname{div} \mathbf{U} + 2\mu \frac{\partial U_R}{\partial R} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} =$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2\lambda}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \text{ Следовательно,}$$

$$\text{При } R = R_0: \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2\lambda}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -P_R. \quad (3.79)$$

Примем во внимание, что для не установившихся (не стационарных, либо для не периодических) полей в краевой задаче должны быть заданы ещё начальные условия. Если мы определяем поле в моменты времени $t > t_0$, то краевая задача должна содержать сведения о значениях искомого поля Φ и его производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в момент времени t_0 . Так как при

$P_R(t) = P_0 \cdot \delta(t)$ возбуждающее упругие колебания давление начало (и окончило) своё воздействие на среду в момент времени $t=0$, то уместно потребовать выполнения следующих начальных условий в области V

$$\text{При } t \leq 0: \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (3.80)$$

Фактически условия (3.80) означают, что в области V не было упругих колебаний до начала действия "взрывного очага" продольных упругих волн.

Выражения (3.77) - (3.80) - это краевая задача для области V , которая имеет единственное решение для потенциала Φ . Получим это решение.

$$\text{Левая часть уравнения (3.77) } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \nabla^2 \Phi \text{ при условии}$$

$\Phi = \Phi(R, t)$. Убедимся в том, что её можно записать иначе. Произведение

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (R \cdot \Phi)}{\partial R^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \Phi \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Следовательно, уравнение (3.77) можем представить в виде:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (R \cdot \Phi)}{\partial R^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \text{ Умножая левую и правую части этого равенства}$$

на R и принимая во внимание, что аргументы R и t - взаимно независимы,

получаем: $\frac{\partial^2(R \cdot \Phi)}{\partial R^2} = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2(R \cdot \Phi)}{\partial t^2}$ или

$$\frac{\partial^2 G}{\partial R^2} = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \text{ где } G = R \cdot \Phi. \quad (3.81)$$

Согласно (3.17), (3.18), уравнение (3.81) - это уравнение струны для произведения $R \cdot \Phi = G$, а его решение: $G = (R \cdot \Phi) = G_1(t - R/v_P) + G_2(t + R/v_P)$, где G_1 и G_2 - две любые, дважды дифференцируемые, функции аргументов $(t - R/v_P)$ и $(t + R/v_P)$ соответственно. Следовательно, решение уравнения (3.77), либо (3.81), для потенциала Φ : $\Phi = \frac{G_1(t - R/v_P)}{R} + \frac{G_2(t + R/v_P)}{R}$. Первое слагаемое в правой части этого выражения отвечает потенциалу расходящейся сферической волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{1}_R$, а второе - потенциалу сходящейся сферической волны, распространяющейся в направлении $-\mathbf{1}_R$.

Из физических условий задачи ясно, что сходящейся сферической волны быть не должно. А какое из требований краевой задачи заставляет нас "отбросить" второе слагаемое в правой части выражения для Φ ? Это - начальные условия (3.80). Сходящаяся сферическая волна должна была существовать в сколь угодно ранние моменты времени t , в частности, при $t < 0$. Поэтому, чтобы удовлетворить условию (3.80), выбираем $G_2 = 0$ и тогда для потенциала Φ поля U_P получаем:

$$\Phi = \frac{G_1(t - R/v_P)}{R}. \quad (3.82)$$

Выражение (3.83) удовлетворяет условиям (3.77), (3.78), (3.80) краевой задачи. Нам осталось обеспечить выполнение граничного условия (3.79) для потенциала Φ . Как это можно сделать в случае (А), когда $P_R(t) = P_0 \cdot \delta(t)$, - не ясно. Но, подразумевая возможность применения преобразования Фурье (3.34) и теоремы о свёртке (3.36), перейдём к случаю (Б) гармонически меняющихся давления:

$$\text{при } R=R_0 \quad P_R(t) = P_0 \cdot \exp(i\omega t). \quad (3.83)$$

При этом и сферически-симметричные поля $\Phi(R, t)$, $\mathbf{U} = \mathbf{1}_R \cdot U_R(R, t)$ в области V также будут гармонически меняться. В частности для поля $\Phi(R, t)$ при применении комплексной записи для потенциала $\Phi(R, t)$ из (3.82) получаем:

$$\Phi = \frac{G_0 \cdot \exp[i\omega(t - R/v_P)]}{R}, \quad (3.84)$$

где G_0 - неизвестная константа, не зависящая от координаты R точки наблюдения. Эта константа G_0 , конечно, может зависеть от величин P_0 , R_0 , ω и параметров λ , μ ρ области пространства V , в которой $R > R_0$ (рис. 3.22).

Согласно (3.83), (3.84), множитель $\exp(i\omega t)$ содержат все члены уравнения (3.79). Сокращая этот множитель, из (3.79), (3.83), (3.84) получаем уравнение для нахождения G_0 :

при $R = R_0$:

$$(\lambda + 2\mu)G_0 \frac{d^2}{dR^2} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R} + \frac{2\lambda}{R} G_0 \frac{d}{dR} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R} = -P_0. \quad (3.85)$$

Определим производные в левой части равенства (3.85).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dR} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R} &= \frac{d}{dR} \left[\exp(-i\omega R/v_P) \cdot R^{-1} \right] = -\exp(-i\omega R/v_P) \cdot R^{-2} - \\ &- \frac{i\omega}{v_P} \exp(-i\omega R/v_P) \cdot R^{-1}; \\ \frac{d^2}{dR^2} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R} &= -\frac{d}{dR} \exp\left[(-i\omega R/v_P) \cdot R^{-2}\right] - \\ &- \frac{i\omega}{v_P} \frac{d}{dR} \left[\exp(-i\omega R/v_P) \cdot R^{-1} \right] = 2 \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R^3} + \frac{i\omega}{v_P} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R^2} + \\ &+ \frac{i\omega}{v_P} \frac{\exp(-i\omega R/v_P)}{R^2} - \frac{\omega^2 \exp(-i\omega R/v_P)}{v_P^2 R} = \\ &\left(\frac{2}{R^3} + \frac{2i\omega}{v_P R^2} - \frac{\omega^2}{v_P^2 R} \right) \exp(-i\omega R/v_P). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения для производных в уравнение (3.85), при $R=R_0$ получаем:

$$\begin{aligned} -P_0 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P) &= (\lambda + 2\mu)G_0 \left(\frac{2}{R_0^3} + \frac{2i\omega}{v_P R_0^2} - \frac{\omega^2}{v_P^2 R_0} \right) - \frac{2\lambda}{R_0} G_0 \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{i\omega}{v_P R_0} \right) = \\ &= \frac{G_0}{R_0^3} \left[(\lambda + 2\mu) \left(2 + \frac{2i\omega R_0}{v_P} - \frac{\omega^2 R_0^2}{v_P^2} \right) - 2\lambda \left(1 + \frac{i\omega R_0}{v_P} \right) \right] = \\ &= \frac{G_0}{R_0^3} \left[\lambda \left(2 + \frac{2i\omega R_0}{v_P} - \frac{\omega^2 R_0^2}{v_P^2} - 2 \frac{i\omega R_0}{v_P} - \frac{i\omega R_0}{v_P} \right) + 2\mu \left(2 + \frac{2i\omega R_0}{v_P} - \frac{\omega^2 R_0^2}{v_P^2} \right) \right] \\ &= \frac{G_0}{R_0^3} \left[-(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\omega^2 R_0^2}{v_P^2} \right) + 4\mu \left(1 + \frac{i\omega R_0}{v_P} \right) \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что, согласно (3.10), $(\lambda+2\mu)=\rho \cdot v_P^2$, можем представить это уравнение в следующем виде:

$$-P_0 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P) = \frac{G_0}{R_0^3} \left[\left(-\rho \omega^2 R_0^2 + 4\mu \right) + i \cdot 4\mu \frac{\omega R_0}{v_P} \right]$$

Решение этого уравнения для G_0 :

$$G_0 = \frac{-P_0 \cdot R_0^3 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P)}{(4\mu - \rho\omega^2 R_0^2) + i \cdot 4\mu \frac{\omega R_0}{v_P}} = \frac{-P_0 \cdot R_0 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P)}{\left(\frac{4\mu}{R_0^2} - \rho\omega^2\right) + i \cdot \frac{4\mu\omega}{v_P \cdot R_0}}. \quad \text{Умножая}$$

числитель и знаменатель в правой части последнего выражения на плотность ρ и принимая во внимание, что, согласно (3.13), $\mu = \rho \cdot v_S^2$, для G_0 получаем следующее выражение:

$$G_0 = \frac{-\frac{1}{\rho} P_0 \cdot R_0 \cdot \exp(i\omega R_0/v_P)}{\left(\frac{4v_S^2}{R_0^2} - \omega^2\right) + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot \frac{2v_S}{R_0} \cdot \frac{v_S}{v_P}}. \quad (3.86)$$

Введём обозначения

$$\omega_0 = \frac{2v_S}{R_0}, \quad h = \frac{v_S}{v_P} \cdot \omega_0 = 2 \frac{v_S^2}{R_0 \cdot v_P}, \quad (3.86, a)$$

пользуясь которыми из (3.86) получаем:

$$G_0 = -\frac{P_0 R_0}{\rho} \cdot \frac{\exp(i\omega R_0/v_P)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h}. \quad (3.86, б)$$

Так как, согласно (3.84), потенциал $\Phi = \frac{G_0 \cdot \exp[i\omega(t - R/v_P)]}{R}$, то из (3.84), (3.86, б) получаем:

$$\Phi = -\frac{P_0 R_0}{\rho R} \cdot \frac{\exp\left[i\omega\left(t - \frac{R - R_0}{v_P}\right)\right]}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h}. \quad (3.87)$$

Определим теперь ненулевую компоненту U_R поля смещений \mathbf{U} . Так как $U_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R}$, дифференцируя выражение для Φ , получаем:

$$U_R = \frac{P_0 R_0}{\rho R} \cdot \frac{\frac{1}{R} + i \frac{\omega}{v_P}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h} \exp(i\omega\tau), \quad \text{где } \tau = t - \frac{R - R_0}{v_P}. \quad (3.88)$$

В выражении для U_R в числителе дроби два слагаемых: $\frac{1}{R}$ и $i \frac{\omega}{v_P}$.

Первое из них убывает с ростом R , а второе не зависит от R . Поэтому можем ввести понятия "ближняя зона" и "дальняя зона". В ближней зоне $\frac{1}{R} \gg \frac{\omega}{v_P}$, а в дальней зоне $\frac{1}{R} \ll \frac{\omega}{v_P}$ или $R \gg \frac{v_P}{\omega}$. В сейсморазведке обычно справедливо последнее неравенство (дальняя зона).

Пример. Пусть $v_P=1000$ м/с, частота $f=50$ Гц и соответственно круговая частота $\omega=2\pi f \approx 300$ с⁻¹. Тогда $\frac{v_P}{\omega} \approx 3$ м и при $R > 15$ м – 20 м имеем $R \gg \frac{v_P}{\omega}$, а расстояния, "проходимые" упругими волнами от их возбудителей до датчиков (точек наблюдения), обычно гораздо больше.

При $R \gg \frac{v_P}{\omega}$ из (3.88) получаем:

$$U_R = \frac{P_0 R_0}{\rho R} \cdot \frac{i\omega}{v_P} \cdot \frac{\exp(i\omega\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h}. \quad (3.89)$$

Представим (3.89) в следующем виде:

$$U_R = P_0 \frac{R_0}{R} M(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau), \quad M(\omega) = \frac{i\omega}{\rho \cdot v_P [(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h]}, \quad (3.90)$$

где $M(\omega)$ - комплексная частотная характеристика источника (модели взрывного "очага") продольных упругих волн. Согласно (3.90), $M(\omega)$ зависит от радиуса R_0 , круговой частоты ω , упругих параметров среды и её плотности ρ . Компонента U_R поля смещений пропорциональна амплитуде P_0 , $M(\omega)$ и отношению R_0/R . От частотной характеристики $M(\omega)$ зависят амплитуды и фазы смещений. Множитель

$\exp(i\omega\tau) = \exp\left[i\omega\left(t - \frac{R - R_0}{v_P}\right)\right]$ в выражении (3.90) для U_R описывает

распространение поля смещений U (с ненулевой компонентой U_R) от границы источника продольных упругих волн в радиальном направлении (в направлении орта $\mathbf{1}_R$). При действительной (а не комплексной) форме

$$\text{Re}[\exp(i\omega\tau)] = \cos\left[\omega\left(t - \frac{R - R_0}{v_P}\right)\right].$$

Амплитуда смещений $|U_R|$ пропорциональна модулю $|M(\omega)|$ комплексной частотной характеристики источника продольных упругих волн. Из (3.90) получаем:

$$|M(\omega)| = \frac{\omega}{\rho \cdot v_P \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 h^2}}. \quad (3.90, a)$$

Из (3.90, a) следует, что при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$ модуль $|M(\omega)|$ и амплитуда $|U_R|$ стремятся к нулю. В соответствии с (3.86, a), (3.90, a) частотная зависимость $|M(\omega)|$ имеет максимум при круговой частоте

$$\omega = \omega_0 = 2v_S / R_0 = \frac{2}{R_0} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Сказанное означает, что частотная зависимость $|M(\omega)|$ - это полосовой фильтр, а ω_0 - круговая частота собственных колебаний сферического источника ("взрывного очага") продольных упругих волн. Частота ω_0 зависит от μ , ρ и обратно пропорциональна радиусу R_0 . Это можно

истолковать следующим образом. Величине R_0 можно придать смысл того радиуса, при котором смещения не велики и справедливы законы теории упругости и теории распространения упругих колебаний. С увеличением "мощности взрыва" R_0 растёт и, в соответствии с изложенным выше, возрастает доля низкочастотной компоненты в поле смещений.

Представляет интерес не только поле смещений с компонентой U_R , но и скорость смещений $\eta = \frac{\partial U_R}{\partial t}$. Так как при временном факторе $\exp(i\omega t)$

производная $\frac{\partial \exp(i\omega t)}{\partial t} = i\omega \exp(i\omega t)$, то, принимая во внимание, что

произведение $i \cdot i = -1$, из выражения (3.90) для компоненты U_R в дальней зоне для скорости смещений получаем:

$$\eta = P_0 \frac{R_0}{R} M_\eta(\omega) \cdot \exp(i\omega t), \text{ где } M_\eta(\omega) = \frac{-\omega^2}{\rho \cdot v_p \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h \right]} \quad (3.91)$$

омплексная частотная характеристика источника продольных упругих волн для скорости смещений η . Модуль этой частотной характеристики

$$|M_\eta(\omega)| = \frac{\omega^2}{\rho \cdot v_p \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2 h^2 \right]}. \text{ Из последнего выражения следует,}$$

что при $\omega \rightarrow 0$ модуль $|M_\eta(\omega)| \rightarrow 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $|M_\eta(\omega)| \rightarrow \frac{1}{\rho \cdot v_p} = \frac{1}{Z_p}$, где

$Z_p = \rho \cdot v_p$ - акустическая жёсткость. Это означает, что по отношению к скорости смещений η "взрывной очаг" играет роль фильтра верхних частот.

Вернёмся теперь к случаю, когда радиальное давление, приложенное к поверхности S (при $R=R_0$) можно аппроксимировать δ -функцией Дирака: $P_R(t) = P_0 \cdot \delta(t)$, где $P_0 = \text{const}$. В соответствии с преобразованием Фурье (3.34) и теоремой о свёртке (3.36)

$$U_R(R, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{P_R}(\omega) * S_{U_R}(\omega) \cdot \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.92)$$

Знаем, что согласно (3.38,б) спектральная характеристика δ -функции Дирака: $S_\delta(\omega) = 1$, а согласно полученному решению (3.90) для гармонически меняющегося поля смещений спектральная характеристика компоненты U_R :

$$S_{U_R}(\omega) = \frac{P_0 R_0}{\rho R} \cdot \frac{\frac{1}{R} + i \frac{\omega}{v_p}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h} \exp\left(-i\omega \frac{R - R_0}{v_p}\right). \quad (3.93)$$

Подставляя выражение (3.93) для $S_{U_R}(\omega)$ в (3.92) и принимая во внимание, что $S_\delta(\omega) = 1$, получаем выражение для компоненты $U_R(R, t)$ для случая, когда давление на сферической поверхности S можно

аппроксимировать функцией $P_R(t) = P_0 \cdot \delta(t)$. То есть для этого случая компоненту $U_R(R,t)$ можем представить в виде интеграла Фурье:

$$U_R(R,t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{P_0 R_0}{\rho R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{R} + i \frac{\omega}{v_P}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\omega h} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{R - R_0}{v_P}\right)\right] d\omega. \quad (3.94)$$

Анализ этого выражения показал, в частности, следующее ([Гурвич И.И., 1970]). При фиксированных значениях R зависимости $U_R(t)$ могут иметь такой вид, как показано на рис. 3.3. Одной из зависимостей подобного вида мы пользовались ранее при анализе решений уравнения струны - "одномерного" волнового уравнения (рис. 3.4, 3.5).

3.21. О точечном источнике продольных упругих волн.

Иногда в теории распространения упругих колебаний пользуются таким понятием, как "точечный источник продольных упругих волн". От сферического источника к точечному можно перейти, формально полагая полагая, что $R_0 \rightarrow 0$, но произведение $P_0 \cdot R_0$ - конечная величина.

Если такой источник расположен в начале сферических координат, то (при $\mathbf{U} = \text{grad } \Phi$) поле смещений $\mathbf{U} = \mathbf{1}_R U_R(R,t)$, потенциал $\Phi = \Phi(R,t)$ и $U_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R}$. Тогда, в соответствии с (3.84), решение уравнения Гельмгольца для потенциала Φ сферически-симметричного гармонически-меняющегося поля смещений \mathbf{U} :

$$\Phi = G_0 \frac{\exp[i\omega(t - R/v_P)]}{R} = G_0 \frac{\exp[i(\omega t - k R)]}{R}, \quad (3.95)$$

где в соответствии с (3.39) волновое число $k = k_P = \omega/v_P$.

Из (3.95) следует, что ненулевую компоненту U_R такого поля \mathbf{U} определяет выражение: $U_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -G_0 \cdot \left(\frac{i\omega}{v_P \cdot R} + \frac{1}{R^2} \right) \exp[i\omega(t - R/v_P)]$.

3.22. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. "Сосредоточенный" источник

Ещё одним, рассматриваемым в теории распространения упругих колебаний и в сейсморазведке, простейшим видом возбудителя упругих колебаний является источник в виде "сосредоточенной силы". В этом случае полагают, что переменная сила $\mathbf{F}(t)$ приложена к некоторой точке θ - центру элементарного объёма dV упругой среды. Такой источник соответствует модели возбудителя упругих колебаний при помощи удара, генератора сейсмических колебаний (ГСК), "падающего груза" и т. п.

Приведём выражения для поля смещений \mathbf{U} , возбуждаемого таким источником, для случая, когда среда - однородна по параметрам λ , μ , ρ , сила $\mathbf{F}(t)$ - гармонически меняющаяся с круговой частотой ω , точка θ -

начало сферических координат (R, θ, φ) с полярной осью, совпадающей с осью Z декартовых, либо цилиндрических координат. Это означает, что в начале θ этих систем координат $\mathbf{F} = \mathbf{1}_z F_z$, $F_z = F_0 \cos(\omega t)$ (рис. 3.23,а). В этом случае, согласно решению соответствующей прямой задачи, поле смещений \mathbf{U} определяют выражения:

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}_R U_R + \mathbf{1}_\theta U_\theta, \quad U_R = \frac{F_0}{4\pi\rho v_P^2} \cdot \frac{\cos\theta}{R} \cos[\omega(t - R/v_P)],$$

$$U_\theta = \frac{-F_0}{4\pi\rho v_S^2} \cdot \frac{\sin\theta}{R} \cos[\omega(t - R/v_S)], \quad (3.96)$$

где, в соответствии с (3.10), (3.13), $v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$ - скорости распространения продольных и поперечных упругих волн.

Из (3.96) следует, что действие силы $\mathbf{F} = \mathbf{1}_z F_z(t)$ в однородной упругой среде приводит к возбуждению двух упругих волн, распространяющихся (с разными скоростями) в радиальном направлении $\mathbf{1}_R$. Об этом свидетельствует то, что содержащим время t аргументом компонент U_R , U_θ поля смещений \mathbf{U} является разность $t - R/v_{P,S}$. Эти упругие волны - продольная волна с полем смещений $\mathbf{U}_P = \mathbf{1}_R U_R$ и поперечная волна (поле $\mathbf{U}_S = \mathbf{1}_\theta U_\theta$). Согласно (3.96), амплитуды смещений у этих волн по-разному зависят от угла θ между направлением силы \mathbf{F} и направлением $\mathbf{1}_R$ их распространения (рис. 2.23,б, в, г).

На рис. 2.23,б показано, какими могут быть векторы \mathbf{U}_P и \mathbf{U}_S на сферических поверхностях P и S с центрами в точке θ , если значения функций $\cos[\omega(t - R/v_{P,S})]$ в выражениях (3.96) для U_R и U_θ положительны. Из этих же выражений следует, что амплитуды P и S волн, возбуждаемых источником в виде "сосредоточенной силы", зависят от угла θ между направлением силы \mathbf{F} в точке θ и радиусом-вектором \mathbf{L}_{oa} , где a - точка наблюдения. На рис. 3.23,в,г показаны зависимости амплитуд продольной $|U_R|$ и поперечной $|U_\theta|$ упругих волн от угла θ . Амплитуды $|U_R|$ продольной компоненты поля \mathbf{U} максимальны при $\theta=0$ и $\theta=\pi$, а амплитуды $|U_\theta|$ поперечной компоненты поля \mathbf{U} - максимальны при $\theta=\pi/2$.

Сказанное означает следующее. Если, например, возбуждающая упругие колебания сила $\mathbf{F}(t)$ имеет вертикальное направление (по оси Z), то возбуждаемое этой силой упругое колебание в виде продольной волны будет иметь максимальную амплитуду в этом же направлении. В горизонтальном направлении амплитуда колебаний для продольной (P) волны будет равна нулю.

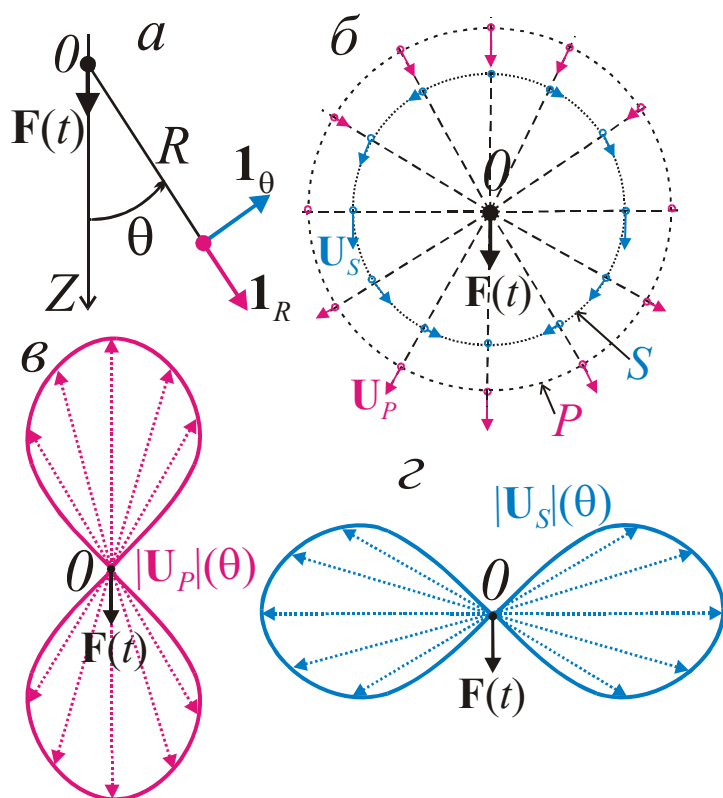


Рис. 3.23.

Возбуждение продольных (P) и поперечных (S) волн "сосредоточенным источником" - силой $F(t)$ в точке 0

Если же сила $F(t)$ будет направлена по горизонтальной оси, например по направлению оси X , то по направлению этой оси упругое колебание в виде поперечной (S) волны будет равно нулю. Эта волна будет иметь максимальную амплитуду в плоскости $x=0$, в частности на вертикальной оси Z . Эти обстоятельства учитывают в "малоглубинной" сейсморазведке, в которой при помощи удара того или иного направления можно возбудить продольные и поперечные упругие волны, направления

преимущественного распространения которых имеют различные направления.

3.23. О Формуле Кирхгофа и принципе Гюйгенса-Френеля

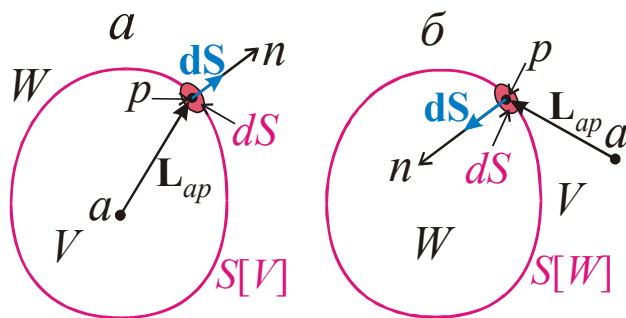
Для постоянных потенциальных полей есть формулы Грина для потенциала U статического поля f (см, например, [Альпин и др., 1985], [Каринский, 2014]). В частности для скалярного потенциала U поля f (при $f = -\text{grad}U$) в ограниченной поверхностью $S[V]$ области пространства V , где нет источников поля, и потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U(a) = 0$, справедливо выражение

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) d\omega. \quad (3.97).$$

Здесь $U(p)$ - потенциал в точках p на поверхности $S[V]$,

$$d\omega = d\omega(a) = \frac{(\mathbf{L}_{ap} \mathbf{dS})}{L_{ap}^3} =$$

$= dS \cdot \cos(\mathbf{L}_{ap}, n) / L_{ap}^2$ - угол видимости (из точки a) ориентированной элементарной площадки dS на поверхности $S[V]$ с центром в точке p , а



n - нормаль к этой поверхности, наружная относительно области пространства V (см. рис. 3.24,а).

Рис. 3.24.
К формуле Кирхгофа

Выражение (3.97), как уже было отмечено, справедливо, если все источники поля расположены вне области V (в области пространства W). Оно остаётся справедливым, если

область W - локальная, ограниченная поверхностью $S[W]$, а V - неограниченная "снаружи" область пространства (рис 3.24,б). В учебнике [Альпин и др., 1985] показано, что выражение для $U(a)$ можно представить в виде:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \left[\frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} + \frac{1}{L_{ap}^2} \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} U(p) \right] dS.$$

Перейдём к случаю, когда в однородной по упругим параметрам области пространства V нет возбудителей вынужденных упругих колебаний, а все эти возбудители находятся в области пространства W (рис 3.24,б). Тогда в однородной по упругим параметрам λ , μ и плотности ρ области V поля, характеризующие распространение упругих колебаний, удовлетворяют однородным волновым уравнениям (3.10) - (3.15). В частности, для скалярного потенциала Φ поля смещений ($\mathbf{U}_p = \text{grad } \Phi$)

справедливо однородное волновое уравнение (3.12): $\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$.

От уравнения Лапласа оно отличается наличием члена со второй производной по времени t . Для характеристик полей, удовлетворяющих такому однородному волновому уравнению, Кирхгофом было получено выражение, более общее по сравнению с формулой Грина (3.97) для потенциала, удовлетворяющего уравнению Лапласа. Например, формулу Кирхгофа для скалярного потенциала Φ поля смещений в точке a области V (где нет вынужденных колебаний и для Φ справедливо однородное волновое уравнение (3.12)) для случая, который иллюстрирует рис. 3.24,б, можно представить в виде:

$$\Phi(a, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[W]} \left[-\Phi(p, t') \frac{\partial(1/L_{ap})}{\partial n} + \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial \Phi(p, t')}{\partial n} + \frac{1}{v \cdot L_{ap}} \frac{\partial \Phi(p, t')}{\partial t} \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} \right] dS, \quad (3.98)$$

где $\partial L_{ap} / \partial n = \cos(\mathbf{L}_{ap}, n)$, а (для потенциала Φ поля смещений \mathbf{U}_p)

скорость $v = v_p$, $t' = t - L_{ap} / v$ и, следовательно, $t - t' = L_{ap} / v$. Разность $t - t'$ зависит от расстояний L_{ap} и скорости v .

Согласно (3.98), поле $\Phi(a, t)$ в точке a области пространства V в момент времени t определяют следующие значения Φ в точках p на поверхности $S[W]$ (рис. 3.24). Это - поле $\Phi(p, t')$ в (более ранние по сравнению с t) моменты времени t' , производные $\partial\Phi(p, t') / \partial n$ по направлениям нормалей n в точках p и производные по времени $\partial\Phi(p, t') / \partial t$ в этих точках в моменты времени t' . В соответствии с (3.98), при неизвестных и расположенных в области пространства W возбуждителях поля смещений, (рис. 3.24), можем определить это поле в произвольной точке a области V в момент времени t , если на границе области W известны значения $\Phi(p, t')$, $\partial\Phi(p, t') / \partial n$, $\partial\Phi(p, t') / \partial t$. Детальнее это описано в учебнике [Альпин и др., 1985] (с. 378- 382).

Выражение (3.98) может служить математическим обоснованием принципа Гюйгенса. Согласно этому принципу каждую точку пространства, охваченного волновым процессом можно рассматривать, как источник вторичных волн (колебаний). Этим принципом можно воспользоваться для определения положения фронта волны в различные моменты времени, если известно положение этого фронта в некоторый "начальный" момент времени (см. [Альпин и др., 1985], с. 383, [Гурвич, 1970], с. 274- 276).

3.24. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн

Наглядную интерпретацию принципа Гюйгенса и сравнительно простой способ определения волнового поля, являющийся следствием формулы Кирхгофа (3.98), привёл Френель.

Пусть область пространства W (рис 3.25) ограничена плоскостью Π и полусферой $S_{C\Phi}$ (рис. 3.25) с радиусом $R_{C\Phi} \rightarrow \infty$. В точке O области W (в начале цилиндрических координат r, φ, z с осью Z) расположен точечный источник гармонических волн. Точка наблюдения a находится вне W - в области V , причём обе точки O и a лежат на оси Z - нормали к плоскости Π .

Находящийся в точке O точечный источник возбуждает сферическую гармоническую продольную волну. В соответствии с (3.95) потенциал такой волны можем представить в виде: $\Phi = C \frac{\exp[i(\omega t - k L)]}{L}$, где $C = \text{const}$.

При этих условиях для входящих в правую часть выражения (3.98) потенциала Φ и производных на плоскости Π получаем следующие выражения.

$$\Phi(p) = C \cdot \exp(i\omega t) \cdot \exp\left[-ik(r^2 + z_p^2)^{1/2}\right] \cdot (r^2 + z_p^2)^{-1/2}, \quad \frac{\partial\Phi(p)}{\partial t} = i\omega\Phi(p),$$

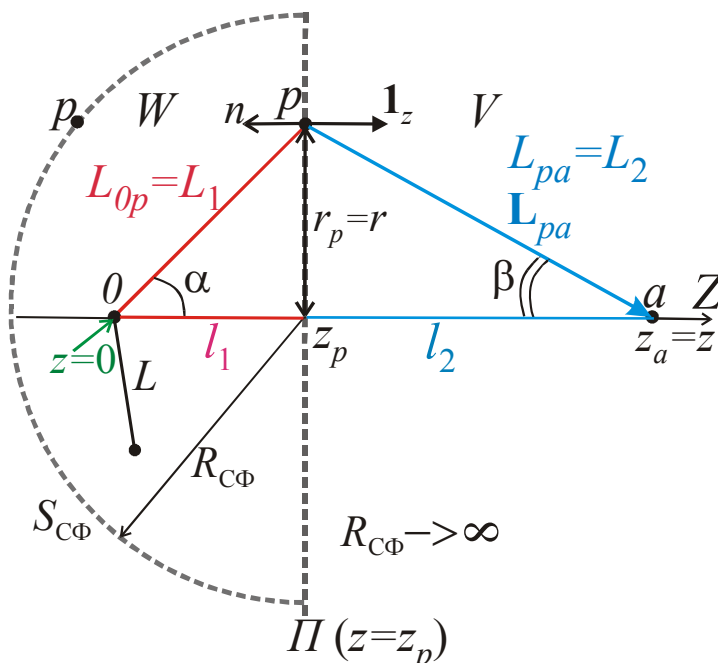


Рис. 3.25.

К выводу выражения (3.99).

$$\frac{\partial\Phi(p)}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi(p)}{\partial z_p} = -C \cdot \exp(i\omega t) \cdot \frac{\partial}{\partial z_p} \left\{ \exp\left[-ik(r^2 + z_p^2)^{1/2}\right] \cdot (r^2 + z_p^2)^{-1/2} \right\} = \dots,$$

$$L_{ap} = \left[r^2 + (z_p - z)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z_p} \left[r^2 + (z_p - z)^2 \right]^{1/2} = \dots,$$

$$\frac{\partial(1/L_{ap})}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z_p} \left[r^2 + (z_p - z)^2 \right]^{-1/2} = \dots$$

"Задание". Вычислить производные $\frac{\partial\Phi(p)}{\partial n}$, $\frac{\partial L_{ap}}{\partial n}$, $\frac{\partial(1/L_{ap})}{\partial n}$ и упростить выражение (3.98) для $\Phi(a, t)$ в случае, когда $kL_1 \gg 1$, $kL_2 \gg 1$.

После дифференцирования и ряда преобразований (см. [Альпин и др., 1985], стр. 384- 385) на основе формулы Кирхгофа (3.98), получаем для потенциала Φ поля смещений в точке a выражение

$$\Phi(a, t) = C_0 \int_{\Pi} \frac{\exp\left\{i \left[\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} (L_1 + L_2) \right]\right\}}{L_1 \cdot L_2} \cos(\mathbf{1}_z, \mathbf{L}_{pa}) dS,$$

которое, при переходе к действительной форме записи, очевидно принимает следующий вид:

$$\Phi(a, t) = C_0 \int_{\Pi} \frac{\cos \left[\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} (L_1 + L_2) \right]}{L_1 \cdot L_2} \cos(\mathbf{1}_z, \mathbf{L}_{pa}) dS. \quad (3.99)$$

В (3.99) C_0 - множитель, не зависящий от расстояний L_1, L_2 ; Λ - длина волны, связанная с волновым числом k равенством $\Lambda = (2\pi)/k$; $\cos(\mathbf{1}_z, \mathbf{L}_{pa}) = \cos\beta = (z - z_p) \cdot [r^2 + (z - z_p)^2]^{-1/2}$ (см. рис. 3.25). Заметим, что выражение (3.99) получено при условиях: $kL_1 \gg 1, kL_2 \gg 1$. Это означает, что точки p на плоскости Π находятся в дальней зоне расположенного в точке O возбудителя гармонических волн, а точка a находится в дальней зоне расположенных в точках p плоскости Π источников вторичных волн. В (3.99) принято во внимание, что точки p , расположенные на полусфере $S_{\text{сф}}$ находятся на бесконечно большом расстоянии от точки a (см. рис. 3.25) и их "вклад" в потенциал $\Phi(a, t)$ - бесконечно мал.

Согласно (3.99), поле Φ в точке a определяет сумма волн, возбуждаемых всеми элементарными источниками на плоскости Π , расположенными на элементарных площадках dS с центрами в точках p . При фиксированных расстояниях L_1, L_2 поле всех вторичных источников, расположенных в точках p , одинаково в точке a . Это означает что такие площадки dS с центрами в точках p образуют кольца dS_k со средними радиусами r_k и с осью Z , проходящей через точки O и a . Согласно (3.99), если радиусы r_k и r_{k+1} колец dS_k и dS_{k+1} таковы, что суммы расстояний L_1, L_2 от точек O и a до этих колец различаются на половину длины волны - $\Lambda/2$, то вклады находящихся на dS_k и dS_{k+1} источников вторичных волн в величину $\Phi(a, t)$ будут различаться на π (180°).

Представим себе круг и множество колец на плоскости Π . На рис. 3.26,б показаны круг и одно такое кольцо. Ширину колец выберем такой, чтобы при переходе от его внутренней границы к внешней сумма расстояний $L_1 + L_2$ менялась на $\Lambda/2$ - половину длины волны:

$$\begin{aligned} (L_1^{(1)} + L_2^{(1)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) &= \frac{\Lambda}{2}, \quad (L_1^{(2)} + L_2^{(2)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) = 2 \frac{\Lambda}{2}, \\ (L_1^{(3)} + L_2^{(3)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) &= 3 \frac{\Lambda}{2}, \dots, (L_1^{(n)} + L_2^{(n)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) = n \frac{\Lambda}{2}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

где $L_1^{(0)} + L_2^{(0)} = L_{Oa}$ - расстояние между точками O и a .

Радиусы r_1, r_2, \dots, r_n (рис. 3.26,а) - границы колец Френеля,

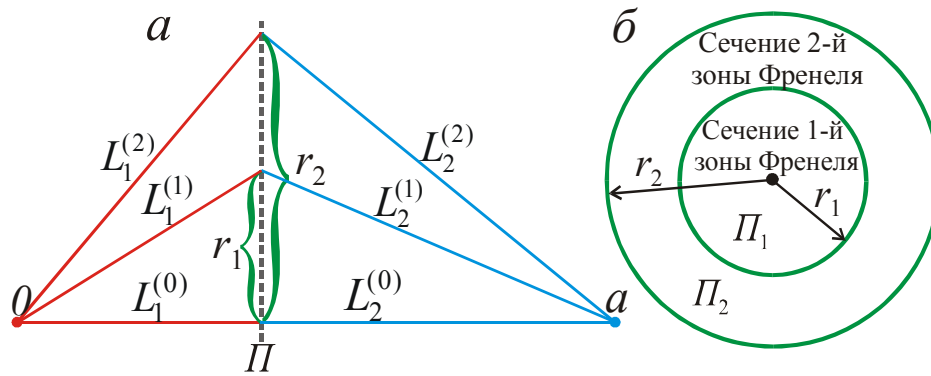


Рис. 3.26.

К зонам Френеля. В плоскости, проходящей через точки O и a (а); сечения 1-ой и 2-й зон Френеля плоскостью Π (б)

являющихся сечениями зон Френеля плоскостью Π (рис. 3.26,б). При условиях (3.100) в фиксированный момент времени t аргументы функции $\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda}(L_1 + L_2)\right]$ в (3.99) на границах соседних колец различаются на π .

Интеграл по плоскости Π в (3.99) можем представить, как сумму интегралов по кругу Π_1 и кольцам, Π_2, Π_3, \dots :

$$\Phi(a, t) = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (3.101)$$

где, в соответствии с (3.99), $I_1 = C_0 \int_{\Pi_1} \dots dS$, $I_2 = C_0 \int_{\Pi_2} \dots dS$, $I_3 = C_0 \int_{\Pi_3} \dots dS, \dots$.

На рис. 3.27,а сплошными линиями показаны сечения зон Френеля плоскостью, проходящей через точку O (где находится возбудитель сферических волн) и точку наблюдения a . Результаты расчётов приведены для случая, когда расстояние $L_{Oa} = 4\Lambda$. Координаты z (см. рис. 3.25) и расстояние r до оси Z на рис. 3.27 нормированы на длину волны Λ . Границы зон Френеля - поверхности эллипсоидов вращения с фокусами в точках O и a , а показанные на рис. 3.27,а их сечения - эллипсы с центрами в этих точках. Цифры (1, 2, 3, 4, 5) на рис. 3.27 обозначают номера зон Френеля.

На рис. 3.27,б показаны (одни из возможных для фиксированного момента времени t) зависимости относительных вкладов в величину $\Phi(a, t)$ источников вторичных волн на плоскости Π от (нормированного на Λ) расстояния r до оси Z .

Результаты расчётов на рис. 3.27,б получены для случая, когда плоскость Π расположена на одинаковых расстояниях от точек O и a . Как видно на этом рисунке, если в (3.99) интеграл $I_1 = C_0 \int_{\Pi_1} \dots dS$ по кругу Π_1 положителен, то интегралы I_3, I_5, \dots по кольцам Π_3, Π_5, \dots - также

положительны, а интегралы I_2, I_4, \dots по кольцам Π_2, Π_4, \dots - отрицательны (и наоборот).

Из-за множителя $1/(L_1 \cdot L_2)$ в подынтегральной функции в (3.99) интегралы I_1, I_2, I_3, \dots убывают по абсолютной величине с увеличением номера кольца Френеля.

Представим выражение (3.101) в следующем виде:

$$\Phi(a, t) = \frac{I_1}{2} + \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_2 + I_3}{2} + \frac{I_3 + I_4}{2} + \dots \quad (3.102)$$

Как видно на рис. 3.27, из-за различия знаков интегралов I_n при чётных и

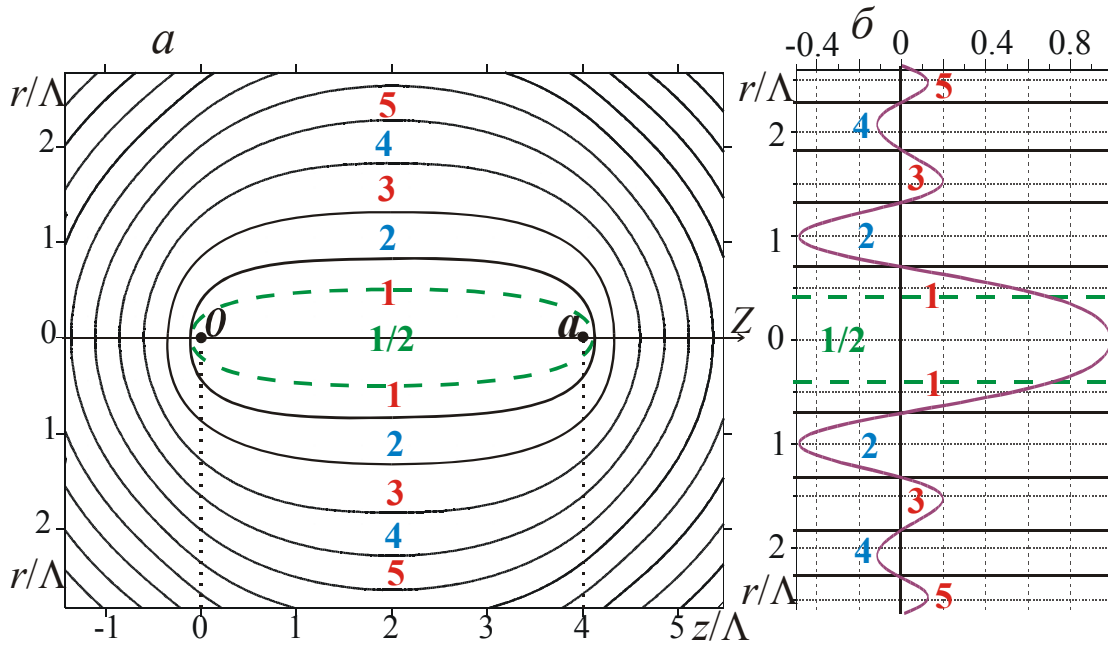


Рис. 3.27.

Зоны Френеля и область, существенная для распространения волн

нечётных индексах n абсолютные величины второго, третьего и последующих слагаемых в правой части (3.102) будут значительно меньше, чем первое слагаемое: $I_1/2$, то есть $\Phi(a, t) \approx I_1/2$. Поэтому принято полагать, что потенциал $\Phi(a, t)$, а также поле смещений U , зависят, в основном, от источников вторичных волн, расположенных в пределах "половины первой зоны Френеля", площадь сечения которой плоскостью Π в два раза меньше площади сечения этой плоскостью первой зоны Френеля. При этом радиус половины первой зоны Френеля $r_{1/2} = r_1 / \sqrt{2} \approx 0.707 \cdot r_1$ (см. рис. 3.26). Эту (соответствующую половине первой зоны Френеля) часть пространства называют *областью, существенной для распространения волн*. На 3.27,а,б эта область обозначена "1/2", а её границы показаны штриховыми линиями. В рассматриваемом случае (точечный источник продольных упругих волн) она имеет форму эллипсоида вращения с фокусами в точках O и a .

Из (3.100), рис. 3.26,а и теоремы Пифагора следует, что радиус r_1 1-ой зоны Френеля можно определить, пользуясь равенствами:

$$\left(L_1^{(1)} + L_2^{(1)}\right) - \left(L_1^{(0)} + L_2^{(0)}\right) = \frac{\Lambda}{2}, \quad r_1^2 = \left(L_1^{(1)}\right)^2 - \left(L_1^{(0)}\right)^2 = \left(L_2^{(1)}\right)^2 - \left(L_2^{(0)}\right)^2 \quad \text{и}$$

$L_1^{(0)} + L_2^{(0)} = L_{Oa}$. В частности, при $L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = L_{Oa}/2$, когда точки O и a находятся на одинаковых расстояниях от плоскости Π , (см. рис. 3.26,а) для максимального радиуса первой зоны Френеля получаем выражения:

$$r_1^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda \left(\frac{\Lambda}{4} + L_{Oa} \right)}, \quad r_1^{\max} \approx \frac{\sqrt{\Lambda \cdot L_{Oa}}}{2}, \quad (3.103)$$

второе из которых справедливо при $L_{Oa} \gg \Lambda$ (дальняя зона). Из (3.103) следует, что для максимального радиуса области, существенной для распространении волн, справедливо выражение:

$$r_{1/2}^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\Lambda}{4} + L_{Oa} \right)}, \quad \text{а при } L_{Oa} \gg \Lambda : r_{1/2}^{\max} \approx \frac{\sqrt{\Lambda \cdot L_{Oa}}}{2\sqrt{2}}. \quad (3.104)$$

Согласно (3.104), радиус области, существенной для распространении волн, тем меньше, чем короче длина волны Λ . При $\Lambda \rightarrow 0$ имеем: $r_{1/2}^{\max} \rightarrow 0$. В этом случае (в однородной среде) волна распространяется от источника O по лучам. Такими ("лучевыми") представлениями о распространении упругих волн пользуются в геометрической акустике, а аналогичный подход к распространению ЭМ волн при очень малых длинах волн Λ применяют в геометрической оптике.

Литература

1. Альпин Л. М., Даев Д. С, Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. М., «Недра», 1985.
2. Гурвич И. И. Сейсморазведка. Учебник для ВУЗов. М., «Недра», 1970.
3. Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. РГГРУ, 2014 г. 203 с. (Электронная версия, http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf или <http://www.geokniga.org/books/6822>).
4. Каринский А. Д. «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Статические поля, стационарное электрическое поле. Учебное пособие. 2014 г. 105 с. (Электронная версия, http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf или <http://www.geokniga.org/books/6823>).
5. Кауфман А. А., Левшин А. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 3. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2001.
6. Кауфман А. А., Левшин А. Л., Ларнер К. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 4. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2003.
7. Кауфман А. А., Левшин А. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 5. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2005.
8. Корн Г. и Корн Е. Справочник по математике. Изд. 2-е. М., «Наука», 1970.
9. Рябинкин Л. А. Теория упругих волн. М., «Недра», 1986.